ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Programme de colle n°18
Semaine du 11/03

Variables aléatoires à densité ; compléments (convergences, approximations)

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille TD11 sur les variables à densité sont exigibles.

> Attention : en cohérence avec l'étude des intégrales impropres, seules les densités admettant des limites finies à gauche et à droite en tout réel sont au programme.

Variables à densité

- Fonction de répartition ; ses propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, continuité à droite en tout point.
  $\forall\, a < b \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{P}(a < \mathrm{X} \leqslant b) = \mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a)$.
  Pour tout réel x :
  - $\mathrm{P}(\mathrm{X} < x) = \lim\limits_{t \to x^-} \mathrm{F_X}(t)$
  - $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{F_X}(x) - \lim\limits_{t \to x^-} \mathrm{F_X}(t)$
  - si $\mathrm{F_X}$ est continue en x, on a $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = 0$.
- La fonction de répartition d'une variable certaine $\mathrm{X} = a$ doit être connue.
- Réciproquement, toute fonction F croissante, tendant vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, et continue à droite en tout point, est la fonction de répartition d'une certaine variable X.
- Une variable X est à densité ssi $\mathrm{F_X}$ est continue, et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. Dans ce cas, toute fonction f telle que $\mathrm{F}'_{\mathrm{X}} = f$ (sauf en un nombre fini de points) est appelée densité de f.
  NB : une variable à densité admet donc plusieurs densités ; notamment, en les points où $\mathrm{F_X}$ n'est pas dérivable, on peut donner une valeur arbitraire à f.
- Réciproquement, on appelle *densité* toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Il existe alors une variable de densité f.
- Si X est une variable de densité f, on a : pour tout réel x, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = 0$.
  Expression des quantités $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant x)$, $\mathrm{P}(a < \mathrm{X} \leqslant b)$ en fonction d'intégrales de f.
  Ces dernières probabilités sont inchangées si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.
- **Lois usuelles :**
  Expressions d'une densité et de la fonction de répartition pour :
  - ⋆ $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.
  - ⋆ $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
  - ⋆ $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ (et en particulier : $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$).

- Une variable à densité f admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge *absolument* ; on a alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Généralisation : moments d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.
  Les étudiants doivent savoir repérer le cas d'une densité paire ; en cas d'existence de l'espérance, cette dernière est alors nulle (à justifier par un changement de variable).

- Une variable à densité f admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Elle admet alors une espérance, et on a : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\big((\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\big) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$.

- Espérances et variances des lois usuelles.

- Théorème de transfert : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points ; la variable $g(\mathrm{X})$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
  Si la densité f est nulle hors de $[a,b]$ on peut directement se ramener à $\mathrm{E}(g(\mathrm{X})) = \displaystyle\int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Obtention de la fonction de répartition et/ou densité de var de type $g(\mathrm{X})$ quand on connaît celle de X dans des cas simples : g est affine, est la fonction carré, exp, ln, etc.

Cas de plusieurs variables aléatoires définies sur le même univers

- Linéarité et croissance de l'espérance (si $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) = 1$ alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{Y})$).

- Indépendance de variables aléatoires réelles : X et Y sont indépendantes ssi, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$:
$$\mathrm{P}\big([\mathrm{X} \in \mathrm{I}] \cap [\mathrm{Y} \in \mathrm{J}]\big) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{J})$$
  Équivalence de cette définition avec le critère : X,Y indépendantes ssi, pour tous réels (t_1, t_2) :
$$\mathrm{P}\big([\mathrm{X} \leqslant t_1] \cap [\mathrm{Y} \leqslant t_2]\big) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant t_2)$$

- Conséquence : si X et Y sont indépendantes, « tout événement portant uniquement sur X est indépendant de tout événement portant uniquement sur Y » .

- Extension à n variables mutuellement indépendantes.

- Résultats : lemme des coalitions ; espérance d'un produit de var mutuellement indépendantes ; variance d'une somme de var mutuellement indépendantes.

- Loi du max et du min de n variables aléatoires indépendantes (et en particulier, suivant la même loi) : la méthode doit être connue.

Compléments sur la loi normale

- Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: expression de la densité usuelle, valeurs de l'espérance et de la variance.
  Utilisation de ces valeurs pour décider de la convergence et de la valeur de certaines intégrales.

- Propriétés de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$ (notée Φ par convention) : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

- Stabilités :
  1. Si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $a\mathrm{X} + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$;
  2. En particulier : on peut « centrer-réduire » une variable suivant une loi normale : si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
  3. Si les X_i sont mutuellement indépendantes, avec $\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Inégalités

- Inégalité de Markov pour une variable positive admettant une espérance.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable admettant une variance.

(démonstrations non exigibles).

Loi faible des grands nombres

- Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (notation : iid).
- Moyenne empirique : si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont n variables aléatoires, leur moyenne empirique est $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  Espérance et variance de la moyenne empirique de n variables iid (dans le cas d'existence de ces quantités). Ceci doit être redémontré.
- Loi faible des grands nombres :

  $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

  (la terminologie de convergence en probabilité n'est pas au programme).

Convergence en loi

- Définition : (X_n) converge en loi vers X (notation : $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$) si, en tout point x où la fonction de répartition F_X est continue, on a :

  $$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Dans le cas où (X_n) et X sont discrètes, équivalence avec :

  $$\forall\, x \in X(\Omega),\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$$

- NB : en vue de démontrer certaines convergences en loi, les étudiants doivent connaître sans hésitation la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

À partir de vendredi : Théorème Central Limite

- Définition de la moyenne centrée réduite de n variables iid d'espérance m et de variance $V = \sigma^2$:

  $$X_n^* = \frac{\overline{X_n} - E\left(\overline{X_n}\right)}{\sqrt{V\left(\overline{X_n}\right)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\right)$$

- TCL : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables iid admettant une variance, la suite $\left(X_n^*\right)$ converge en loi vers une variable suivant $\mathscr{N}(0,1)$.
- Conséquences :
  - à « n grand » , approximation de la loi de $\overline{X_n}$ par une loi normale.
  - Sous certaines conditions sur les paramètres, on a les approximations suivantes :
    * $\mathscr{B}(n,p) \simeq \mathscr{N}(np, npq)$
    * $\mathscr{P}(\lambda) \simeq \mathscr{N}(\lambda, \lambda)$.

  L'énoncé devra faire remarquer : « on admet qu'on peut approximer la loi … par une loi normale » .