Corrigés

Exos convergence

Exercice 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid, $\hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

$T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

T_n est un produit de 0 et 1, donc $T_n(\Omega) = \{0,1\}$

$P(T_n=1) = P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\right)$ car dès qu'un X_i est nul, le produit est nul.

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i=1)$ (indép des X_i)

$$\boxed{P(T_n=1) = p^n}$$

et par suite $\boxed{P(T_n=0) = 1-p^n}$

Pour $n\to+\infty$, $p\in\,]0,1[$ donc $p^n\to 0$

* $\lim_{n\to+\infty} P(T_n=1)=0$
* $\lim_{n\to+\infty} P(T_n=0)=1$ d'où $(T_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où X est égale à 0.

Ex2

$$\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} 0 = \underline{\underline{0}} & \text{si } x<0 \\ \lim_{n\to+\infty} 1 = \underline{\underline{1}} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

si $x=0$, $F_{I_n}(0) = 0 \xrightarrow{n\infty} 0$

si $x \in]0,1]$, $F_{I_n}(x) = 1-\underbrace{(1-x)}_{\in[0,1[}{}^n \xrightarrow{n\infty} 1$

Final^t $F_{I_n}(x) \xrightarrow{n\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Or si X cste égale à 0, on a

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$; F_X discontinue en 0

On observe alors : $\forall x\neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = F_X(x)$

: $I_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Le reste est assez similaire.

Pour $\mathcal{U}([a,b])$ on trouve $I_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1$ cste, égale à a

$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_2$ ——— b.

Ex 4

$Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$ donc $Z_n(\Omega) = [0,1[$

$\Rightarrow \forall x < 0, \quad P(Z_n \leq x) = 0$

$\forall x \geq 1, \quad P(Z_n \leq x) = 1$

$\forall x \in [0,1], \quad P(Z_n \leq x) = \dfrac{1-e^{-x/n}}{1-e^{-1/n}}.$

$Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$: $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

F_Z continue donc il faut $F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\infty]{} F_Z(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

si $x \leq 0$, $F_{Z_n}(x) = 0 \to 0 = F_Z(x)$

— $x \geq 1$ — — — $= 1 \to 1$ — —

si $0 \leq x < 1$, $F_{Z_n}(x) = \dfrac{1-e^{-x/n}}{1-e^{-1/n}}$

Par équivalents usuels $\left(\frac{x}{n} \to 0, \frac{1}{n} \to 0\right)$

$F_{Z_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x/n}{1/n} = x$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = x = F_Z(x)$

d'où la conclusion.

Exercice 7

① Comme ds l'ex 8

② $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ d'où $E(X) = p = 0.4$

et $V(X) = p(1-p) = 0.4 \times 0.6 = 0,24$.

d'où $E(\bar{X}) = E(X) = 0.4$

et $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{200} = \frac{0,24}{200} = 0,0012$

$$P(0.3 \leq \bar{X} \leq 0.5) = P(|\bar{X} - 0.4| \leq 0.1)$$
$$= P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \leq 0.1)$$
$$= 1 - P(|\bar{X} - E(\bar{X})| > 0.1) \quad \text{(passage au contraire)}$$

On $P(|\bar{X} - E(\bar{X})| > 0,1) \leq \frac{V(\bar{X})}{0,01}$ par BT

$$= \frac{0,0012}{0,01} = 0,12$$

et donc $P(0.3 \leq \bar{X} \leq 0.5) \geq 1 - 0.12 = 0,88$

Proba $\geq 88\%$ ... insuffisant pour conclure.

③ $X^* = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - 0.4}{\sqrt{0,0012}} = \cancel{\sqrt{0,0012}(\bar{X} - 0.4)}$

d'où $P(0.3 \leq \bar{X} \leq 0.5) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 0.4 \leq 0.1)$

$$= P\left(-\frac{0.1}{\sqrt{0,0012}} \leq X^* \leq \frac{0.1}{\sqrt{0,0012}}\right)$$

En admettant que $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:

$$P(-\varepsilon \leq X^* \leq \varepsilon) \simeq \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\,\Phi(\varepsilon) - 1$$

où ici $\varepsilon = \dfrac{0,1}{\sqrt{0,0012}} = \dfrac{0,\cancel{1}}{\sqrt{0,\cancel{01} \times 0,12}} = \dfrac{1}{\sqrt{0,12}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{100}}} = \frac{10}{\sqrt{12}}.$$

On a bien $P(0,3 \leq \overline{X}^* \leq 0,5) \simeq 2\,\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{12}}\right) - 1$

Avec $\dfrac{10}{\sqrt{12}} \simeq 2,89$ on lit sur la table

$$\Phi(2,89) \simeq 0,9981$$

d'où $2\,\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{12}}\right) - 1 \simeq \underline{\underline{0,9962}}$

et cette fois la proba à estimer vaut environ 99,62 %, ce qui permet de conclure que notre approximation est légitime.