DS n°4

16/03/2024

Durée : 2h

Exercice 1

Dans cet exercice, a désigne un réel tel que $a > 1$.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{a}{2}(1+x)^{a-1} \text{ si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{a}{2}(1-x)^{a-1} \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Soit Z une variable aléatoire admettant f comme densité ; on note F_Z sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F_Z(x)$ pour tout réel x.

On considère maintenant la variable aléatoire $X = |Z|$. On note F_X la fonction de répartition de X.

3. (a) Montrer : $\forall x \geqslant 0,\ F_X(x) = \begin{cases} 1-(1-x)^a \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

   (b) Achever de déterminer la loi de X.
   Montrer que X est à densité, et qu'une densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x)^{a-1} \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ si } x \notin]0,1[\end{cases}$$

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

4. (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

   (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

5. (a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

   (c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.

   (d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.
   En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

6. On considère enfin une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant toutes la loi de X.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. On note H_n la fonction de répartition de I_n.

(a) Montrer que, pour tout réel x : $\mathrm{H}_n(x) = 1 - \left(1 - \mathrm{F}_\mathrm{X}(x)\right)^n$.

(b) En déduire la fonction de répartition de I_n ; puis, sans calcul mais en utilisant ce qui précède, l'espérance et la variance de I_n.

(c) Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à 0.