DS n°4bis

16/03/2024
D'après ESSEC2 2015
Durée : 3h

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. Dans la première partie, on étudie un type de loi spécifique ; dans la seconde on donne des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites. Les deux parties sont **largement indépendantes.**.
Dans tout l'énoncé, « positif » signifie « positif ou nul » sauf indication contraire.

1 Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathrm{E(X)}$ et $\mathrm{V(X)}$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{\mathrm{F}}$ la queue de la fonction de répartition définie par $\overline{\mathrm{F}}(x) = 1 - \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)$ pour tout x positif.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel, on pose :
$$\begin{cases} p_{\mathrm{X}}(n) & = & \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) \\ p_{\mathrm{Y}}(n) & = & \mathrm{P}(\mathrm{Y} = n) \\ p_{\mathrm{X+Y}}(n) & = & \mathrm{P}(\mathrm{X+Y} = n) \end{cases}$$
Montrer que pour tout n entier naturel,
$$p_{\mathrm{X+Y}}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_{\mathrm{X}}(k) p_{\mathrm{Y}}(n-k).$$

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densité f_{X} et f_{Y} continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et continues à droite en 0, la variable $\mathrm{X+Y}$ admet une densité notée $f_{\mathrm{X}} \star f_{\mathrm{Y}}$ définie, pour x positif, par :
$$(f_{\mathrm{X}} \star f_{\mathrm{Y}})(x) = \int_0^x f_{\mathrm{X}}(u) f_{\mathrm{Y}}(x-u)\, du.$$

On notera $\mathrm{F_{X+Y}}$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\mathrm{X+Y}$.

2. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
   (a) Expliciter, pour x positif, $\mathrm{F}(x)$ et $\overline{\mathrm{F}}(x)$.
   (b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.
   (c) En déduire $\mathrm{F_{X+Y}}(x)$ pour tout x positif.
   (d) Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{\mathrm{F_{X+Y}}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} = +\infty.$$

3. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif, $\overline{\mathrm{F}}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

(a) Montrer que pour tout x positif,

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant P(\max(X,Y) > x).$$

(b) Écrire l'événement $[\max(X,Y) \leqslant x]$ en fonction des événements $[X \leqslant x]$ et $[Y \leqslant x]$ puis montrer que $P(\max(X,Y) > x) = 1 - F^2(x)$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = 2$.

(d) On suppose que $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)}$ existe et est réelle. Montrer que $\ell \geqslant 2$.

4. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positive X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

(a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} P_{[X+Y>x]}(X > x) = \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire (en utilisant la question 3c) que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(X+Y>x)}{P(\max(X,Y)>x)} = 1.$$

(c) Démontrer l'égalité

$$P(X+Y>x) = P([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + P(\max(X,Y) > x).$$

(d) Conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{P(\max(X,Y)>x)} = 0.$$

2 Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

5. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

6. Étude de quelques lois particulières :

(a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

(b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

i. Montrer que f est une densité de probabilité.

ii. Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on ait $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

iii. En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

(c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

i. Déterminer une densité f de X.

ii. Soit $\lambda > 0$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\lambda x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right]$?

iii. En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que

$$\forall x \geqslant x_0, \quad f(x)e^{\lambda x} \geqslant 1.$$

iv. En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln \overline{F}(x)$, pour x positif.

Dans tout ce qui suit on supposera que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x}$ *existe et est réelle.*

7. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant 0$.

8. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\overline{F}(x) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^x r(y)\,dy\right)$.

9. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, $\overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon x}$.

(b) Soit λ tel que $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer que

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x)\,dx = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)\,dx.$$

(c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x)\,dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

10. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant l'espérance E(Z), alors pour tout α strictement positif, on a :

$$P(Z > \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} E(Z).$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

(a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = E(e^{\lambda X})$ existe.

(b) Soit x strictement positif. Montrer que $\overline{F}(x) \leqslant ce^{-\lambda x}$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

La condition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

11. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a

$$\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

(a) Montrer que pour tout y de $[0,1]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0.$

(b) En déduire que pour tout y de $[0,1]$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)} = 0.$

(c) Montrer que pour tout y de $[0,1]$,

$$\lim_{x\to+\infty} P_{[X>x]}(X > x+y) = 1.$$

(d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (R(x+1)-R(x)) = 0.$

12. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

(a) Soit λ strictement positif fixé.

i. Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0,1]$, on a

$$\overline{F}(x+y) \geqslant \overline{F}(x)e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

Indication : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

ii. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}.$$

iii. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n) = +\infty.$

(b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0.$

(d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.