DS n°4
Barème

Exercice 1

1. **1 pt** : positive, continue sauf éventuellement en $-1, 0, 1$.
   1 pt : calcul de l'intégrale.

2. **1 pt** : écrire $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
   1 pt pour 0 et 1.
   2 pts pour l'expression non triviale.

3. (a) **1 pt** pour écrire $P(|Z| \leqslant x) = P(-x \leqslant Z \leqslant x)$.
   2 pts pour utiliser la fonction de répartition en séparant bien $x \leqslant 1$ et $x \geqslant 1$ (**0** si on ne rappelle pas les bonnes hypothèses au moment où on remplace $F(x)$ par son expression).
   (b) **1 pt** pour $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ car $|Z| \geqslant 0$ (**0** si pas de justification).
   1 pt pour $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1.
   1 pt pour la continuité en 0 (ou en 1) ; on accepte « de même » pour le second point.
   1 pt pour dire $F_X' = f_X$.
   1 pt pour dire qu'on dérive *sauf en 0 et 1* et pour poser des valeurs arbitraires de f en ces points.

4. (a) **2 pts** pour $P(Y \leqslant x) = P(X \leqslant 1 - e^{-x})$ (**1 pt** si on oublie « exp strictement croissante »).
   1 pt pour remplacer par la bonne expression (**0** si on oublie « $x \geqslant 0$ donc $1 - e^{-x} \in [0,1]$ » , mais pas de détails supplémentaires attendus).
   (b) **1 pt** ; **0** si on ne parle pas de $x < 0$.

5. (a) **1 pt** pour référence à l'intégrale de la densité de $\mathscr{E}(\lambda)$ ou calcul direct.
   0 si valeur non justifiée.
   (b) **2 pts** pour l'énoncé du théorème de transfert, dont **1** pour la cv *absolue*.
   1 pt pour le calcul.
   (c) **1 pt** pour $X = 1 - e^{-Y}$
   1 pt pour utiliser la linéarité de l'espérance.
   (d) **1 pt** pour convergence et calcul de l'intégrale (« de même qu'en 5b » accepté).
   1 pt pour Koenig-Huygens qui donne $V(e^{-Y}) = E(e^{-2Y}) - E(e^{-Y})^2$.
   1 pt pour le calcul.
   1 pt pour $V(1 - X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$ *(OK si expression intermédiaire absente)*.

6. (a) **1 pt** pour $(I_n > x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)$.
   1 pt pour l'indépendance.
   1 pt pour remplacer $P(\ldots > x)$ par $1 - F_{\ldots}(x)$.
   1 pt pour conclure le calcul.
   (b) **1 pt** pour $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - (1-x)^{an} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
   (placement des cas d'égalité ailleurs toléré).
   2 pts pour signaler qu'on a la même expression en changeant a en an et en déduire les expressions de E et V en reprenant les formules de 5c) et 5d).

(c) **1 pt** pour $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, $= 1$ si $x \geqslant 1$.
1 pt pour $1-(1-x)^{an} \to 1$ quand $0 < x \leqslant 1$ (**0** si on le fait pour $0 \leqslant x$).
1 pt pour la fct. rép de A constante égale à 1 : $\mathrm{F}_\mathrm{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$.
0 si on met $x \leqslant 0$ / $x > 0$.
2 pt pour faire remarquer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_\mathrm{A}(x)$ pour tout $x \neq 0$, mais que ça suffit à obtenir le résultat car F_A discontinue en 0.
0 si « $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n(x) = \mathrm{F}_\mathrm{A}(x)$ » ou si on ne met pas de quantificateur.

⇒ **39 pts** au total