

## Programme de colle n°20 Semaine du 25/03

### Probabilités / Fonctions à deux variables (pour la fin de semaine)

#### Généralités

Tous les résultats sur les variables discrètes et à densité sont à connaître.

#### Inégalités

- Inégalité de Markov pour une variable positive admettant une espérance.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable admettant une variance.

(démonstrations non exigibles).

#### Loi faible des grands nombres

- Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (notation : iid).
- Moyenne empirique : si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont  $n$  variables aléatoires, leur moyenne empirique est  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .  
Espérance et variance de la moyenne empirique de  $n$  variables iid (dans le cas d'existence de ces quantités). Ceci doit être redémontré.
- Loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - E(X)| \geq \varepsilon) = 0$$

(la terminologie de convergence en probabilité n'est pas au programme).

#### Convergence en loi

- Définition :  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  (notation :  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ) si, en tout point  $x$  où la fonction de répartition  $F_X$  est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Dans le cas où  $(X_n)$  et  $X$  sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , équivalence avec :

$$\forall x \in X(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$$

- NB : en vue de démontrer certaines convergences en loi, les étudiants doivent connaître sans hésitation la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Théorème Central Limite

- Définition de la moyenne centrée réduite de  $n$  variables iid d'espérance  $m$  et de variance  $V = \sigma^2$  :

$$\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right)$$

- TCL : si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables iid admettant une variance, la suite  $(\overline{X_n})$  converge en loi vers une variable suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Conséquences :
  - à «  $n$  grand », approximation de la loi de  $\overline{X_n}$  par une loi normale.
  - Sous certaines conditions sur les paramètres, on a les approximations suivantes :
    - \*  $\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{N}(np, npq)$
    - \*  $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ .

L'énoncé devra faire remarquer : « on admet qu'on peut approximer la loi ... par une loi normale » .

### Estimateurs

- Définitions :
  - Échantillon d'une loi  $((X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant cette loi).
  - Si  $\theta$  est le paramètre à estimer : estimateur de  $\theta$ , de  $g(\theta)$  (une fonction quelconque de l'échantillon, indépendante de  $\theta$ ).
  - Pour bien se mettre d'accord sur la quantité à estimer, on pourra dire : «on considère  $T_n$  comme un estimateur de  $g(\theta)$ ».
- Exemple fondamental : la moyenne empirique. Si  $X$  a pour espérance  $m$  et pour variance  $\nu$ , les étudiants doivent savoir redémontrer que  $E(\overline{X_n}) = m$  et  $V(\overline{X_n}) = \frac{\nu}{n}$ .

À partir d'ici : si  $T_n$  est un estimateur de  $\theta$ , il s'agit surtout de contrôler  $P(|T_n - g(\theta)| > \epsilon)$  (ou  $P(|T_n - g(\theta)| \leq \epsilon)$ ) à l'aide de Bienaymé-Tchebychev ou de valeurs de  $\Phi$  si, en conséquence du TCL, on approxime la loi de  $X_n^*$  par une loi normale.

### Intervalles de confiance

Intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique. Exemples d'utilisation de Bienaymé-Tchebychev ou du TCL pour obtenir de tels intervalles.

## À partir de jeudi, on peut rajouter :

- Définition. Fonctions polynômiales. Continuité (comme composée de continues... aucune étude en un point « pathologique », prolongement, etc. n'est au programme).
- Représentation graphique de domaines « simples » de  $\mathbb{R}^2$  (demi-plans par exemple).
- Dérivées partielles (notées  $\partial_1$  et  $\partial_2$ ). Fonctions  $\mathcal{C}^1$  (même remarque que pour la continuité). Gradient. Points critiques.
- Dérivées partielles secondes (notées  $\partial_{i,j}^2$ ,  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ ). Fonctions  $\mathcal{C}^2$ . Théorème de Schwarz. Hessienne.
- Recherche d'extremums locaux :
  - Si  $f$  est définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , tout extremum local est un point critique.  
*NB : on admettra que les domaines de définition des fonctions proposées sont des ouverts.*
  - Si  $f$  est définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , l'étude du spectre de la hessienne donne des informations sur les points critiques : min local si deux vap  $> 0$  ; max local si deux vap  $< 0$  ; pas d'extremum si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  ; on ne peut pas conclure s'il y a une valeur propre nulle.  
*NB : les notations de Monge (écriture de la hessienne sous la forme  $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$  et les critères qui en découlent) ne sont pas au programme. Il faut rechercher les valeurs propres.*
  - Suites d'exos possibles : examiner le caractère global de l'extremum trouvé ; détermination de la nature d'un point critique dans le cas où l'étude de la hessienne ne permet pas de conclure. Ceci doit être guidé.