Préparation Oral HEC

Algèbre linéaire

1 Quelques manipulations issues de l'algèbre bilinéaire

Exercice 1.1 (D'après HEC 2016)**.** Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t\mathrm{M}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, on rappelle que ${}^t(\mathrm{MN}) = {}^t\mathrm{N}\,{}^t\mathrm{M}$.

1. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; on pose : $\mathrm{A} = \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}$ et $\alpha = {}^t\mathrm{X}\mathrm{X}$.

   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

   (b) Déterminer le rang de A.

   (c) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

   (d) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

   (e) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
   Soit $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_p$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

   (b) Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que X est la colonne nulle si et seulement si ${}^t\mathrm{X}\mathrm{X} = 0$.

   (c) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On note 0_n la colonne nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $\mathrm{VY} = 0_n$ si et seulement si l'on a ${}^t\mathrm{VVY} = 0_n$.

   (d) En déduire que la matrice ${}^t\mathrm{VV}$ est inversible.
   (on pourra introduire son endomorphisme canoniquement associé)

2 Une diagonalisation raffinée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit H la matrice de $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont la première et dernière colonne sont égales à $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\\\1\end{pmatrix}$, et les autres à $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ (tous les coefficients nuls sauf celui « du milieu » , en position $n+1$).

On note $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$, et $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{2n+1})$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de H.

2. Calculer $\mathrm{H} \times \mathrm{E}_{n+1}$.

3. Déduire des deux questions précédentes des valeurs propres de H. Peut-on en déduire la dimension de certains sous-espaces propres ?

4. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de H. Montrer que $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{H}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{H})$.

On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ canoniquement associé à H.

5. Montrer que $\mathrm{Im}(h)$ est stable par h. Vérifier que $\left(e_{n+1}, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(h)$.

6. On note $\widetilde{h} : \mathrm{Im}(h) \to \mathrm{Im}(h),\ x \mapsto h(x)$ la *restriction* de h à $\mathrm{Im}(h)$.
   Construire la matrice de $\widetilde{h}$ dans la base sus-mentionnée. Quelles sont les valeurs propres et sous-espaces propres de cette matrice ?

7. Montrer que $2 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{H})$ et donner un vecteur propre associé. H est-elle diagonalisable ?