

# Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques(E)

Juin-Juillet 2022

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités de logique et de présentation. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours, de grosses faiblesses en calcul et quasiment aucune connaissance en informatique.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et dans leur finesse de raisonnement. La moyenne est de 9,63 et l'écart-type est de 3,96.

Le jury aimerait insister sur quatre points.

- **L'informatique** : Beaucoup de candidats avaient manifestement délaissé la matière et ne comprenaient rien au programme.  
Nous rappelons que tous les sujets ou presque comportent des questions d'informatiques. Ces questions, nous permettent d'évaluer leurs esprits pratiques et de relier les mathématiques à des cas concrets. Le nouveau programme particulièrement riche en informatique permettra de proposer des questions variées en Python et en SQL.
- **Les dessins** : Beaucoup de candidats ne savent pas dessiner le graphe d'une fonction, le dessin d'une projection dans  $\mathbb{R}^2$  ou illustrer un raisonnement.
- **La journée de l'oral** il est très utile d'assister, en temps réel ou en différé, aux diverses présentations de cette journée. Ces présentations détaillent l'organisation et les attendus de chaque oral et elles donnent le point de vue des membres du jury et d'anciens candidats sur les épreuves.
- **La prestation** : Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en maltraitant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

# SUJET E1

## Exercice principal E1

Soit  $a$  un réel de  $]0, 2[$  et  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Question de cours : Donner l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire  $Z$  suivant la loi normale de paramètres 0 et  $a$ .
2. (a) Montrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.  
Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  définie sur un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .  
(b) Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .  
(c) Donner le tableau des variations des courbes de  $f$  et de  $F_X$  pour  $a \in ]0, 2[$  quelconque et tracez-les pour  $a = 1$ .  
(d) Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

3. On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par :  $Y = \frac{X^2}{2a}$ .

Déterminer la loi de  $Y$ .

4. On suppose désormais que le paramètre  $a$  est inconnu et on souhaite l'estimer. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que  $X$ .

On note  $S_n$  la variable aléatoire définie par  $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$ .

- (a) Montrer que  $S_n$  est un estimateur sans biais et convergent de  $a$ .  
(b) Proposer un intervalle de confiance de  $a$  au niveau de risque  $\alpha \in ]0, 1[$  à l'aide de  $S_n$ .
5. Soit la variable aléatoire  $Z$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  par :  
Pour  $\omega \in \Omega$ ,  $Z(\omega) = \frac{1}{X(\omega) - 1}$  si  $X(\omega) \neq 1$  et  $Z(\omega) = 0$  si  $X(\omega) = 1$ .  
Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .

---

### Solution :

1. Programme ECE2 page 16. Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et  $a$ .  
Alors  $\mathbb{E}(Z) = 0$  et  $V(Z) = a$ .

$Z$  admet donc un moment d'ordre 2 et  $\mathbb{E}(Z^2) = V(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2 = a$ .

$$\text{D'autre part, } \mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-t^2/2a} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \boxed{\frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt}$$

2. (a)  $f$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ car } f \text{ est nulle sur } ]-\infty; 0].$$

Soit alors  $A > 0$  :

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt = \left[ -e^{-t^2/2a} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2a} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

$f$  est bien une densité de probabilité.

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ . Ainsi,  $\forall x \in ]-\infty; 0], F_X(x) = 0$

$\forall x \geq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt \boxed{= 1 - e^{-x^2/2a}}$

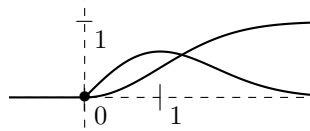
(c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right) - \frac{2x^2}{2a^2} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right) = \frac{a - x^2}{a^2} \exp\left(\frac{-x^2}{a}\right)$

$f'(0) = \frac{1}{a}$ , cela donne l'équation de la tangente en 0,  $y = \frac{1}{a}x$ . La tangente à  $F_X$  en 0 est horizontale

On a donc un maximum en  $x = \sqrt{a}$ , qui vaut  $\frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-1/2)$

$F_X$  est croissante, concave sur  $[0, \sqrt{a}]$  et convexe sur  $[\sqrt{a}, +\infty[$

On trace la courbe pour  $a = 1$ .



(d)  $X$  admet une espérance ssi  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$  converge absolument (donc converge).

Or, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a} e^{-t^2/2a} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt.$$

Or d'après la question 1,  $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = a$

Donc  $\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt$  converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \times \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \times a \boxed{= \sqrt{\frac{\pi a}{2}}}.$$

3.  $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right) = P(X^2 \leq 2ax)$

Si  $x < 0, F_Y(x) = 0$

Si  $x \geq 0, F_Y(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq 2ax) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{2ax}) = F_X(\sqrt{2ax}) = 1 - e^{-2ax/2a} = 1 - e^{-x}$

Donc  $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}.$

4. (a)  $S_n$  est une fonction de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi, qui dépend de  $a$  donc  $S_n$  est un estimateur de  $a$ . Montrons que cet estimateur est sans biais :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2\right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_k^2) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

Or chaque  $X_i$  suit la même loi que  $X$  et son moment d'ordre 2 vaut  $2a$  d'après la question 3.b). Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} 2a = \frac{1}{2n} \times n \times 2a = a.$$

Donc  $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$

En appliquant la loi faible des grands nombres, on a  $\boxed{S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$

(b) Soit  $\varepsilon > 0$  fixé.

Avec Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}(|S_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$

$$\alpha = \frac{4}{n\varepsilon^2} \text{ ssi } \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}$$

Ainsi  $\mathbb{P}\left(|S_n - a| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right) \geq 1 - \alpha$

On a donc comme intervalle de confiance  $\left[S_n - \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}, S_n + \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right]$ , ou même

$$\boxed{\left[\max\left(0, S_n - \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right), \min\left(2, S_n + \frac{2}{\sqrt{\alpha n}}\right)\right]}$$

5. Le support de  $Z$  vaut  $\mathbb{R}$

On détermine pour  $z$  fixé  $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X-1} \leq z\right)$  (puisque  $\mathbb{P}(X=1)=0$ )

Premier cas : si  $z < 0$ ,  $\frac{1}{X-1} \leq z$  ssi  $\frac{1}{z} \leq X-1 < 0$  ssi  $\frac{z+1}{z} \leq X < 1$

Ainsi, comme  $X$  est à densité,  $\mathbb{P}(Z \leq z) = F_X(1) - F_X\left(\frac{z+1}{z}\right) = \exp\left(\frac{-(z+1)^2}{2az^2}\right) - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right)$

Deuxième cas : si  $z = 0$ ,  $\mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(X-1 \leq 0) = F_X(1) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right)$

Troisième cas : si  $z < 0$ ,  $\frac{1}{X-1} \leq z$  ssi  $X-1 \leq 0$  ou  $X-1 > \frac{1}{z}$

Ainsi  $F_X(z) = F_X(1) + 1 - F_X\left(\frac{z+1}{z}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{2a}\right) + \exp\left(\frac{-(z+1)^2}{2az^2}\right)$

## Exercice sans préparation E1

Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur  $a$  et  $b$  pour que la série de terme général  $u_n$  converge.

Ecrire un script Scilab indiquant si la série converge et permettant, en cas de divergence, de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| > 100$ .

En cas de convergence, calculer sa somme.

---

**Solution :**

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &= \ln n + a \ln \left( n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \ln \left( n \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ u_n &= (a+b+1) \ln n + a \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + b \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \\ u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+1) \ln n + a \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + b \left( \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right) + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \\ u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+1) \ln n + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

— Si  $a+b+1 \neq 0$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (a+b+1) \ln n$  : donc, la série diverge grossièrement.

— Si  $a+b+1 = 0$ ,

— 1er cas :  $a+2b \neq 0$ . Alors,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n}.$$

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs (resp. négatifs), la série diverge.

— 2nd cas :  $a+2b = 0$ , alors  $a = -2b$  et  $a+b+1 = 0$ , donc  $a = -2$  et  $b = 1$ .

Il suit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a+4b}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Par critère d'équivalence des séries à termes de signe constant, la série converge.

On conclut que la série converge si et seulement si  $a = -2$  et  $b = 1$ .

```
a=input('Donner la valeur de a')
b=input('Donner la valeur de b')
if (a==-2) & (b==1) then disp('la série converge')
else
    S=a*log(2)+b*log(3)
    k=1
    while abs(S)<=100
        k=k+1
        S=S+log(k)+a*log(k+1)+b*log(k+2)
    end
    disp(k)
end
```

- Dans le cas où  $a = -2$  et  $b = 1$  :

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N [\ln(n) - \ln(n+1)] + \sum_{n=1}^N [\ln(n+2) - \ln(n+1)] \sum_{n=1}^N u_n = -\ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln 2 = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2.$$

Par passage à la limite, on conclut que  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.}$

# SUJET E2

## Exercice principal E2

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  la base canonique de  $E$ .

Soit  $F$  l'espace vectoriel des applications numériques  $f$  telles que il existe  $P \in E$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x} P(x).$$

On pose  $f_k : x \mapsto e^{-x} x^k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

- Question de cours** : soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie.
  - Donner la définition d'un isomorphisme  $\phi$  de  $E$  sur  $F$ .
  - Donner une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .
  - Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$  soit un isomorphisme quand la condition de la question b) est vérifiée.
- Montrer que  $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $F$ .
- Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $E$  par :  $\forall P \in E \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = e^{-x} (P(x) - xP'(x+1))$ .
  - Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .
  - Écrire la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $E$  et  $F$ .
  - $\varphi$  est-elle un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  ?  $\varphi$  est-elle diagonalisable ?
- Soit  $E'$  le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par  $1, X^2$  et  $X^3$ . Soit  $\psi$  l'application définie sur  $E'$  par :  $\forall P \in E' \quad \psi(P) = \varphi(P)$ .  
Déterminer un espace  $F'$  tel que  $\psi$  établisse un isomorphisme entre  $E'$  et  $F'$ .
- Résoudre dans  $E$  l'équation d'inconnue  $P : \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(P)(x) = e^{-x} (1 + \alpha x + x^2)$  où  $\alpha$  est un paramètre réel.

### Solution :

- Programme officiel ECE2 page 6. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
  - Il existe un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  ssi  $\dim(E) = \dim(F)$
  - Si  $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors :  
 $\phi$  est un isomorphisme ssi  $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$  ssi  $\text{Im}(\phi) = F$  ssi  $\text{rg}(\phi) = \dim(E)$ .

- $\forall k, f_k \in F$ .

Et par définition de  $F$ ,  $\forall f \in E \quad \exists (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^3 \mu_k x^k = \sum_{k=0}^3 \mu_k f_k(x)$ .

Donc la famille  $\mathcal{C}$  est génératrice de  $F$ . Montrons que cette famille est libre

Soit  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\sum_{k=0}^3 \lambda_k f_k = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^3 \lambda_k f_k(x) = 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^3 \lambda_k x^k = 0 \text{ et donc } \sum_{k=0}^3 \lambda_k X^k = 0$$

Ainsi  $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, \lambda_k = 0$

(on identifie dans la base canonique de  $E$ )

Donc  $\mathcal{C}$  est libre. Conclusion :  $\mathcal{C}$  est une base de  $F$ .

- La linéarité est immédiate.

Et si  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ ,  $P(X)$  et  $XP'(X+1)$  sont bien des polynômes de  $\mathbb{R}_3[X]$ , donc  $f(P) \in E$ .

- (b) Si  $P(X) = X^0$ ,  $P'(X) = 0$  et  $P'(X+1) = 0$  ainsi  $\varphi(X^0) = f_0$ .  
 Si  $P(X) = X$ ,  $P'(X) = 1$  et  $P'(X+1) = 1$  ainsi  $\varphi(X) = 0$ .  
 Si  $P(X) = X^2$ ,  $P'(X) = 2X$  et  $P'(X+1) = 2X+2$  ainsi  $\varphi(X^2) = -f_2 - 2f_1$ .  
 Si  $P(X) = X^3$ ,  $P'(X) = 3X^2$  et  $P'(X+1) = 3X^2 + 6X + 3$ . Ainsi  $\varphi(X^3) = -2f_3 - 6f_1 - 3f_1$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (c)  $M$  n'est pas inversible (une colonne nulle) donc  $\varphi$  n'est pas un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

$M$  est diagonalisable : elle est triangulaire supérieure et l'on peut lire qu'elle admet 4 valeurs propres distinctes.

4.  $(1, X^2, X^3)$  est une base de  $E'$ .

On pose  $F' = \text{vect}(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$

$\varphi$  est linéaire donc  $\psi$  est linéaire.

L'image de la base  $(1, X^2, X^3)$  par  $\psi$  est  $(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$ .

C'est une famille libre (étagée dans la base des  $f_k$ )

On pose donc  $F' = \text{vect}(\varphi(X^0), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$ .

On a alors  $\dim(F') = \dim(E')$  et  $\text{Im}(\psi) = F'$

$\psi$  est un isomorphisme de  $E'$  dans  $F'$

5. On pose le problème avec la matrice  $M$

Soit  $P = aX^0 + bX + cX^2 + dX^3$

$\varphi(P) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2)$

$$\text{ssi} \begin{cases} a & & & & = & 1 \\ & - & 2c & - & 3d & = & \alpha \\ & & - & c & - & 6d & = & 1 \\ & & & & - & 2d & = & 0 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} a & & & & = & 1 \\ & & & & 2 & = & \alpha \\ & & c & & & = & -1 \\ & & & d & & = & 0 \end{cases}$$

Premier cas si  $\alpha \neq 2$ , il n'y a pas de solutions.

Si  $\alpha = -2$  tout polynôme de la forme  $X^0 + \lambda X - X^2 = 0$ , où  $\lambda$  est un réel.



## Exercice sans préparation E2

Soit le script Scilab suivant :

```
function y=X(p)
    y=0
    u=1
    while u>p
        y=y+1
        u=rand()
    end
endfunction

p=input('p=');
q=input('q=') // 0<p<1 et 0<q<1
Y=X(p);
Z=X(q);
M=[1,2;Y,Z];
disp(M)
```

1. Expliquer le script.
2. On exécute le script.  
Quelle est la probabilité que  $M$  soit inversible ?

---

### Solution :

1. Les différents appels de **rand()** sont supposés indépendants donc  $X$  simule le temps d'attente d'un succès de probabilité  $p$ .  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

$M$  est une matrice carrée d'ordre 2  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ Y & Z \end{pmatrix}$  où  $Y$  et  $Z$  sont deux variables géométriques de paramètres respectifs  $p$  et  $q$ .  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes car les différents appels de **rand()** sont indépendants.

2.  $M$  est non inversible si et seulement si les colonnes  $\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ Z \end{pmatrix}$  sont liées donc si et seulement si l'évènement  $[Z = 2Y]$  est réalisé.

$$[Z = 2Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([Y = k] \cap [Z = 2k]) \quad \text{union disjointe.}$$

$$\mathbb{P}(Z = 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times q(1-q)^{2k-1} = \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k (1-q)^{2k}.$$

$$\mathbb{P}(Z = 2Y) = \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}.$$

Donc la probabilité que  $M$  soit inversible est

$$1 - \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}$$

# SUJET E3

## Exercice principal E3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto e^{-x^2}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $H_n$  sur  $\mathbb{R}$  par  $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$ ,  
où  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on admet que si  $g$  et  $h$  sont deux fonctions  $n$  fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ , alors le produit  $g \times h$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec

$$(g \times h)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}. (**)$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable.

2. Déterminer  $H_0$  et  $H_1$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Déterminer une relation simple entre  $H_{n+1}$ ,  $H_n$  et  $H'_n$ .

(b) Montrer que  $H_n$  est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et la parité.

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) = -2(n+1)f^{(n)}(x).$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\varphi$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  associe le polynôme  $2XP'(X) - P''$ . On admet que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que  $H_i$  est un vecteur propre de  $\varphi$ .

(b) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

6. (a) Compléter la fonction Scilab suivante qui si on lui donne  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$  une matrice de

$\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  contenant les coefficients d'un polynôme  $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k X^{k-1}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  renverra une matrice de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  contenant les coefficients de  $P'(X)$ .

```
function D=deriv(M,n)
    D=zeros(n+1,1)
    for ....
        ....
    end;
endfunction
```

(b) Compléter alors la fonction Scilab suivante, qui si on lui donne  $n \in \mathbb{N}^*$  renverra une matrice de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  contenant les coefficients de  $H_n$ .

```
function H=coeff(n)
    H=zeros(n+1,1);
    H(1,1)=1;
    for k=1:n
        HH=H
        Hderiv=deriv(H,n)
        ....
        for j=...
            ...
        end
    end
end
endfunction
```

**Solution :**

1. Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$  (programme officiel ECE2, page 7).

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\boxed{H_0(x) = e^{x^2} e^{-x^2} = 1}$  et  $\boxed{H_1(x) = (-1)e^{x^2}(-2x)e^{-x^2} = 2x}$ .

3. (a) On dérive la relation qui définit  $H_n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$H'_n(x) = (-1)^n 2x e^{x^2} f^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} f^{(n+1)}(x) \boxed{= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)}.$$

- (b) On démontre par récurrence sur  $n$  que  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant  $2^n$ . La question 2 montre que la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

On suppose la propriété vérifiée pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $H_{n+1} = 2XH_n - H'_n$  (question 3) et comme on a supposé que  $H_n$  est un polynôme, alors  $H_{n+1}$  est lui aussi un polynôme. Son degré est celui de  $2XH_n$ , donc son degré est  $n + 1$ . Puisque  $H_n$  a pour coefficient dominant  $2^n$ , le coefficient dominant de  $H_{n+1}$  est  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ . On a donc démontré la propriété au rang  $n + 1$ .

On conclut par récurrence que  $\boxed{H_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$ .

4. La fonction  $f$  est infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -2xf(x)$ . On calcule la dérivée  $(n + 1)$ -ième de ce produit par la formule (de Leibniz) rappelée par l'énoncé en prenant  $g : x \mapsto -2x$  et  $h : x \mapsto f(x)$ . Comme pour tout  $k \geq 2$ ,  $g^{(k)} = 0$  (fonction nulle), on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}(-2)f^{(n)}(x).$$

D'où,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0}$$

5. (a) La famille  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_n[X]$  puisque c'est une famille de polynômes échelonnés en degré, ne contenant pas le polynôme nul (voir question 4). Comme cette famille contient  $n + 1$  vecteurs, c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Pour calculer  $\varphi(H_k)$ , on utilise 6.

$$H'_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (2xf^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x))$$

$$\begin{aligned} H''_k(x) &= (-1)^k e^{x^2} (4x^2 f^{(k)}(x) + 2xf^{(k+1)}(x) + 2f^{(k)}(x) + 2xf^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)) \\ &= (-1)^k e^{x^2} ((4x^2 + 2)f^{(k)}(x) + 4xf^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(H_k)(x) &= (-1)^k e^{x^2} ((4x^2 - 4x^2 - 2)f^{(k)}(x) + (2x - 4x)f^{(k+1)}(x) - f^{(k+2)}(x)) \\ &= (-1)^k e^{x^2} (-2 + 2(k+1))f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi(H_k) = 2XH'_k - H''_k = 2kH_k$ , ce qui prouve que  $\boxed{H_k \text{ est vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } 2k}$ .

- (b)  $\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$  puisque l'on vient de trouver une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  constituée de vecteurs propres de  $\varphi$ . Le spectre de  $\varphi$  est  $\{2k, 0 \leq k \leq n\}$  : on a en effet trouvé  $n + 1$  valeurs propres distinctes et il ne peut pas y en avoir davantage.

6. (a) Si  $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k X^{k-1} = a_0 X^0 + \sum_{k=2}^{n+1} a_k X^{k-1}$ ,  $P'(X) = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k X^{k-2} = \sum_{j=1}^n j a_{j+1} X^{j-1}$ .

Donc le  $n + 1$ -ième coefficient de la matrice que renvoie la fonction doit être nul, et le  $j$ -ième doit valoir  $j \times a_{j+1}$ .

```
for j=1:n
    D(j,1)=j*M(j+1,1)
```

$$(b) \quad H_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k a_j X^{j-1} \text{ et } H'_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1},$$

$$H_k(X) = 2XH_{k-1}(X) - H'_{k-1}(X) = \sum_{j=1}^k 2a_j X^j - \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1} = \sum_{i=2}^{k+1} 2a_{i-1} X^{i-1} - \sum_{j=1}^k b_j X^{j-1}.$$

Donc le premier coefficient de  $H_k(X)$  vaut  $-b_1$ , les coefficients pour  $j$  entre 2 et  $k+1$  :  $2a_{j-1} - b_j$  (même pour  $j = k+1$  car  $b_{k+1} = 0$ )

```
function H=coeff(n)
    H=zeros(n+1,1);
    H(1,1)=1;
    for k=1:n
        HH=H
        Hderiv=deriv(H,n)
        H(1,1)=-Hderiv(1,1)
        for j=2:k+1
            H(j,1)=2*HH(j-1,1)-Hderiv(j,1)
        end
    end
endfunction
```

## Exercice sans préparation E3

Soit  $a$  et  $b$  deux réels non nuls.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telles que  $X(\Omega) = \{0, a\}$  et  $Y(\Omega) = \{0, b\}$ .

1. Montrer que  $X$ ,  $Y$  et  $XY$  admettent une espérance et déterminer ces espérances.
  2. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .
- 

### Solution :

1. Remarquons que  $XY(\Omega) = \{0, ab\}$ .

$X$ ,  $Y$  et  $XY$  sont des variables aléatoires finies, elles admettent donc une espérance.

Et  $\mathbb{E}(X) = a\mathbb{P}(X = a)$ ,  $\mathbb{E}(Y) = b\mathbb{P}(Y = b)$  et  $\mathbb{E}(XY) = ab\mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$ .

2.  $(\implies)$  Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

$(\impliedby)$  Si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , alors  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ .

Or d'après la question précédente,  $ab\mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = ab\mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$ .

Or  $ab \neq 0$ . Donc  $\mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = \mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b))$ .

Donc  $(X = a)$  et  $(Y = b)$  sont indépendants.

Alors  $(X = a)$  et  $(X = 0)$  sont indépendants. Ou encore  $(X = 0)$  et  $(Y = b)$  sont indépendants.

De même  $(X = a)$  et  $(Y = 0)$  sont indépendants et  $(X = 0)$  et  $(Y = 0)$  sont indépendants.

Ainsi  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

$X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

## SUJET E4

### Exercice principal E4

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Soit  $\varphi$  l'application qui à tout polynôme  $P$  élément de  $E$  associe la matrice colonne  $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$ .

1. Question de cours : nombre de racines d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ .
3. On suppose dans cette question seulement que  $n = 2$ .

Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  que l'on précisera telle que pour tout  $P \in E$  :

$$\text{Si } P(X) = a + bX + cX^2, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

4. On revient au cas général.

(a) Montrer qu'il existe une matrice  $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  que l'on précisera telle que pour tout  $P \in E$  :

$$\text{Si } P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Justifier que  $V$  est inversible.

- (b) Pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$\begin{cases} L_i(i) = 1 \\ L_i(j) = 0 \text{ pour tout } j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\} \end{cases}.$$

- (c) On pose pour  $i \in [0, n]$ ,  $L_i(X) = \sum_{k=0}^n c_{k,i} X^k$  l'on note et  $C_i = \begin{pmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ \vdots \\ c_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ .

Calculer  $VC_i$  et en déduire l'expression de  $V^{-1}$ .

5. A l'aide de la question 4, retrouver  $A^{-1}$ .

### Solution :

1. Question de cours :

Un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  qui a au moins  $n+1$  racines distinctes est le polynôme nul.

Un polynôme non nul de  $\mathbb{R}_n[X]$  a au plus  $n$  racines distinctes

Programme ECE1 page 10.

2.  $\dim(E) = n+1$ .  $\varphi$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  d'après les opérations sur les polynômes et les opérations sur les matrices.

Soit  $P \in \text{Ker}(\varphi)$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$   $P(i) = 0$ . Or,  $\deg(P) \leq n$  et  $P$  a au moins  $n+1$  racines donc  $P = 0$

Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective. De plus, par théorème du rang,

$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E) = \dim(\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}))$  et donc  $\varphi$  est surjective.

$\varphi$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ .

3.

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ a+2b+4c \end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On résout le système :  $\begin{cases} a = x \\ a+b+c = y \\ a+2b+4c = z \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z)$ .

$$\begin{cases} a = x \\ a+b+c = y \\ a+2b+4c = z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a = x \\ b+c = -x+y \\ 2b+4c = -x+z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a = x \\ b+c = -x+y \\ 2c = x-2y+z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a = x \\ b = -\frac{3}{2}x - 2y - \frac{1}{2}z \\ c = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Le système a une unique solution donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. (a)  $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  où  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}.$

(b)  $\varphi$  est bijective, il existe donc un unique polynôme  $L_i$  tel que  $\varphi(L_i) = E_i$ , où  $E_i$  est le  $i+1$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ , ce qui donne la propriété demandée

(c) Soit  $i \in [0, n]$ , on a alors  $VC_i = \begin{pmatrix} L_i(0) \\ L_i(1) \\ \vdots \\ L_i(n) \end{pmatrix}$

Ainsi  $VC_i = E_i$  où  $E_i$  est le  $(i+1)$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ .

On a donc  $C_i = V^{-1}E_i$ ,  $C_i$  est la  $(i+1)$ -ième colonne de  $V^{-1}$ .

On peut aussi voir, comme en b), que  $\varphi^{-1}(L_i) = E_i$ .

$V^{-1}$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  formée en juxtaposant les colonnes  $C_0, C_1, \dots, C_n$ .

5.  $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$

$$L_1 = \frac{X(X-2)}{-1} = 2X - X^2.$$

$$L_3 = \frac{X(X-1)}{2} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$$

En écrivant les coordonnées de ces trois polynômes dans la base canonique dans trois colonnes, on retrouve bien  $A^{-1}$ .

## Exercice sans préparation E4

Deux urnes A et B contiennent initialement chacune deux boules numérotées 0 et 1. Leur contenu évolue lors d'une expérience aléatoire et est simulé par un vecteur ligne Scilab.

Ainsi la ligne de code `A=[0,1]` permet de voir qu'initialement, l'urne A contient une boule numérotée 0 et une autre numérotée 1.

On considère la fonction Scilab suivante qui permet de simuler une variable aléatoire  $X$  :

```
function k=simulX()
    A=[0,1]
    B=[0,1]
    Y=grand(4,2,"uin",1,2)
    k=0;
    while (sum(A)>0)&(k<4)
        k=k+1
        i=Y(k,1)
        j=Y(k,2)
        c=A(i)
        A(i)=B(j)
        B(j)=c
    end
endfunction
```

Expliquer le protocole ainsi simulé et donner la loi de  $X$ .

---

### Solution :

A chaque étape, on choisit une boule au hasard dans A et une boule au hasard dans B et on les change d'urnes. On effectue au maximum trois étapes.

Le résultat de la fonction donne

\* le nombre d'échanges nécessaires pour que A contienne les deux boules numérotées 0 si cela se produit en trois étapes ou moins.

\* 4 si au bout de trois échanges on n'a pas obtenu les deux boules 0 dans A.

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

On note  $Y_k$  le nombre de boules 0 dans A à l'issue de  $k$  échanges

$$[X = 1] = [Y_1 = 0]. \text{ Or } \mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(\text{"choisir 1 dans A et 0 dans B"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}}$$

$[X = 2] = [Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]$  (on peut écrire une formule des probabilités totales avec  $(Y_1 = n)_{0 \leq n \leq 2}$  mais seul le terme en  $n = 1$  apporte une contribution non nulle.)

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) \times \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = 2)$$

Or  $[Y_1 = 1] = [ \text{"choisir les deux boules 0 ou les deux boules 1 et les échanger"} ]$

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \boxed{= \frac{1}{8}}$$

$$[X = 3] = ([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2]) \cup ([Y_1 = 0] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2])$$

Union d'événements incompatibles :  $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) \times \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = 2) \times \mathbb{P}_{[Y_1=0] \cap [Y_2=1]}(Y_3 = 2) + \dots$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{4} \boxed{= \frac{1}{8}}$$

$$[X = 4] = \overline{[X \leq 3]} \text{ donc } \boxed{\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{2}}$$



# SUJET E5

## Exercice principal E5

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$  est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket^2$  :  $m_{i,j} = 1$  si  $j = i$  ou  $i + j = 2n + 2$  et  $m_{i,j} = 0$  sinon.

1. **Question de cours :** Donner la définition d'une matrice diagonalisable et une caractérisation.
2. (a) Justifier que  $M$  est diagonalisable.  
(b) Justifier que  $e_{n+1}$  est un vecteur propre de  $f$  et déterminer la valeur propre associée.
3. Notons pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2n+2-k})$ .  
(a) Soit  $g_k$  l'application définie sur  $F_k$  qui à tout élément  $x$  de  $F_k$  associe  $f(x)$ .  
Montrer que  $g_k$  est un endomorphisme de  $F_k$  et donner sa matrice,  $A_k$ , dans la base  $(e_k, e_{2n+2-k})$ .  
(b) Diagonaliser  $A_k$   
(c) En déduire une base de  $F_k$  dans laquelle la matrice de  $g_k$  est diagonale.
4. Déterminer les valeurs propres de  $f$  et ses sous-espaces propres associés à partir des questions précédentes.
5. Pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  
(a) Soit  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A_k$ .  
On admettra que  $B$  admet les même vecteurs propres que  $A_k$ . Déterminer toutes les matrices  $B$  qui conviennent.  
(b) En déduire qu'il existe un endomorphisme  $h_k$  de  $F_k$  tels que  $h_k^2 = g_k$ .
6. Proposer à partir des questions précédentes une matrice  $H$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $H^2 = M$ . Combien de telles matrices pourraient être proposées ici ?

### Solution :

1.  $M$  est dite diagonalisable quand il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}MP$  est diagonale.  
 $M$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimension des sous-espaces propres est égale à la taille de la matrice. Programme ECE2, pages 7-8
2. (a)  $M$  est symétrique réelle donc diagonalisable.  
(b)  $f(e_{n+1}) = e_{n+1}$  et  $e_{n+1} \neq 0$  donc  $e_{n+1}$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 1.
3. (a)  $g_k$  est linéaire car  $f$  est linéaire.  
Soit  $x \in F_k$ . Il existe alors des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $x = \alpha e_k + \beta e_{2n+2-k}$ .  
Par linéarité de  $f$ ,  $g_k(x) = f(x) = \alpha f(e_k) + \beta f(e_{2n+2-k}) = (\alpha + \beta)(e_k + e_{2n+2-k})$ . Donc  $g_k(x) \in F_k$ .  
Donc  $g_k \in \mathcal{L}(F_k)$  et  $\text{mat}(g_k, (e_k, e_{2n+2-k})) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (b)  $Sp(A_k) = \{0, 2\}$  et  $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  et  $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Alors  $\dim E_0 + \dim E_2 = 2 = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Donc  $A_k$  est diagonalisable et il existe une matrice  $P$  par exemple  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  telle que  $P^{-1}A_kP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  $P$  est inversible car  $P$  est la matrice de passage de la base canonique vers une base composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

- (c) En utilisant la diagonalisation de  $A$  :  $\text{mat}(g_k, (e_k - e_{2n+2-k}, e_k + e_{2n+2-k})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

4. D'après ce qui précède  $f(e_{n+1}) = e_{n+1}$ ,  $f(e_1 + e_{2n+1}) = 2(e_1 + e_{2n+1})$  et  $f(e_1 - e_{2n+1}) = 0$  et  $e_{n+1} \neq 0$ ,  $e_1 + e_{2n+1} \neq 0$  et  $e_1 - e_{2n+1} \neq 0$ . Donc  $\{0, 1, 2\} \subset Sp(f)$ .  
Et  $\text{Vect}(e_{n+1}) \subset E_f(1)$ ,  $\text{Vect}(e_k + e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_f(2)$  et  $\text{Vect}(e_k - e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_f(0)$ .

Les familles de vecteurs trouvées sont libres (car naturellement étagées)

Donc  $\dim E_0 \geq 1$ ,  $\dim E_f(2) \geq n$  et  $\dim E_f(0) \geq n$ .

Or  $\dim E_f(0) + \dim E_f(1) + \dim E_f(2) \leq 2n + 1$ . Alors les inégalités précédentes sont des égalités et l'on a toutes les valeurs propres :

$$Sp(f) = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Vect}(e_{n+1}) = E_f(1) \quad \text{Vect}(e_k + e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = E_f(2) \quad \text{Vect}(e_k - e_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = E_f(0)$$

5. (a)  $\diamond$  Comme  $B$  admet les mêmes vecteurs propres que  $A$ ,  $B' = P^{-1}BP$  est diagonale or  $B'^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}AP = D$ .

$$\diamond \quad \text{Ainsi } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ou } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (b) On cherche un endomorphisme de  $F_k$  dont la matrice  $B_k$  dans la base  $(e_k, e_{2n+2-k})$  vérifie  $B_k^2 = A$ .

D'après 3-b) une telle matrice existe (il suffit de poser  $B_k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ )

Il existe  $h_k$  un endomorphisme de  $F_k$  vérifiant  $h_k^2 = g_k$ .

6. Notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers la base  $(e_{n+1}, e_1 - e_{2n+1}, e_1 + e_{2n+1}, e_2 - e_{2n}, e_2 + e_{2n}, \dots, e_{n-1} - e_{n+1}, e_{n-1} + e_{n+1})$ .

On propose les matrices  $H = PDP^{-1}$  où  $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pm \sqrt{2} \end{pmatrix}$

On a proposé  $2^{n+1}$  matrices différentes.

7. S'il vous reste du temps et que vous souhaitez occuper un peu le candidat, vous pouvez lui demander si toutes les matrices "racine carrée" de  $M$  ont été trouvées ici. Séparer alors le cas  $n = 1$  et les cas  $n \geq 2$ .  
Dans le cas  $n = 2$ , remarquez que la matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable (donc n'est pas du type des matrices considérées précédemment) et convient.

## Exercice sans préparation E5

Soit le script Scilab :

```
clf()
plot2d([-1,0.01],[0,0])
x = 0:0.01:3
y = x^2/2
y = 1-exp(-y)
plot2d(x,y)
```

L'exécution de ce script permet d'obtenir la représentation graphique sur  $[-1, 3]$  d'une fonction  $F$ . On suppose que l'expression de  $F$  proposée sur  $[-1, 0]$  est en fait valable sur  $\mathbb{R}_-$  et que celle proposée sur  $]0, 3]$  est valable sur  $\mathbb{R}_{+*}$ .

1. Tracer la courbe représentative de  $F$ . On donne  $\exp\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0.6$ .
2.  $F$  est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ ?  
Si oui, quelle est l'espérance de  $X$  si elle existe?
3. On suppose connue une fonction Scilab nommée `simul` permettant de simuler  $X$ . Ecrire un script donnant une valeur approchée de  $\pi$ .

---

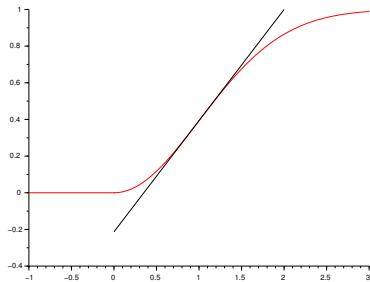
### Solution :

1.  $F(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  si  $x \geq 0$ .

$F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  de dérivée  $f(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}_-$  et  $f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  sur  $\mathbb{R}_{+}^*$ .

$F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$ .

On peut marquer une tangente en 0 ( $f'(0) = 0$ ) et même calculer  $F''(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  pour trouver un point d'inflexion en  $(1, 1 - e^{-1/2})$  avec une dérivée qui vaut  $e^{-1/2}$ .



2.  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité  $f$  (elle est même  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

Soit  $A > 0$ , en prenant  $F - 1$  comme primitive de  $f$ .

$$\int_0^A x f(x) dx = [x(F(x) - 1)]_0^A - \int_0^A (F(x) - 1) dx = \left[-x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A + \int_0^A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  est absolument convergente,  $\mathbb{E}(X)$  existe et  $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ .

```
3. n = 1000;          S = S/n;
   S = 0;             T = 2*S^2;
   for i = 1:n        disp(T);
       S = S+simul()
   end
```

# SUJET E6

## Exercice principal E6

Soit  $a$  un nombre réel fixé. Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\varphi$  l'application qui à tout élément  $f \in E$  associe la fonction  $g$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} f(t) dt \quad \text{et} \quad g(a) = f(a).$$

1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. (a) Soit  $f \in E$ . On note  $g = \varphi(f)$ . Déterminer un DL d'ordre 0 en  $a$  de  $g$ . En déduire que  $g$  est continue en  $a$ .  
(b) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. On fixe dans cette question  $n \in \mathbb{N}^*$ , et l'on confond polynôme et fonction polynomiale  
Pour tout  $k \in [0, n]$ , on pose  $d_k : x \mapsto (x-a)^k$ .  
(a) Pour tout  $k \in [0, n]$ , exprimer  $\varphi(d_k)$  en fonction de  $d_k$ .  
(b) On définit l'application  $\varphi_n$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = \varphi(P)$$

Montrer que  $\varphi_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- (c) Montrer que  $\varphi_n$  est bijectif et diagonalisable.
4. (a) Soit  $f \in E$  et  $g = \varphi(f)$ . Justifier la dérivabilité de  $g$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  et exprimer  $g'(x)$  à l'aide des fonctions  $f$  et  $g$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$   
(b) On pose ici  $f : t \mapsto |t-a|$ . Expliciter dans ce cas  $g = \varphi(f)$ . Cette fonction  $g$  est-elle dérivable en  $a$ ?  
(c) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il surjectif?

---

### Solution :

1. Programme officiel ECE page 9. Seuls les ordres 1 et 2 sont au programme.

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $x_0$  :

Quand  $x \rightarrow x_0$  :  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + o((x-x_0)^2)$

La formule de Taylor n'est exigible qu'à l'ordre 2 selon le programme.

2. (a) Comme la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $F$  l'une d'entre elles.

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ ,  $g(x) = \frac{F(2x-a) - F(x)}{x-a}$ . Si  $x = a$ ,  $g(a) = f(a) = F'(a)$ .

En posant  $x = a + h$ ,  $2x - a = a + 2h$ , donc  $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(a+h) = \frac{F(a+2h) - F(a+h)}{h}$

On écrit un DL à l'ordre 1 de  $F$  (qui est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $a$ )

$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + o(h)$  et  $F(a+2h) = F(a) + 2hF'(a) + o(h)$ . Or,  $F'(a) = f(a)$ , donc :

$$g(a+h) = \frac{hf(a) + o(h)}{h} = f(a) + o(1). \text{ Or, } g(a) = f(a), \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g(a)$$

$g \text{ est continue en } a$

- (b) La fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc continue sur  $\mathbb{R}$ . Par composition et produit,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R} - \{a\}$ . Donc  $g \in E$ . Par linéarité de l'intégrale, pour tout  $(f_1, f_2) \in E^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ ,  $\varphi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda \varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$ .

De plus,  $\varphi(\lambda f_1 + f_2)(a) = (\lambda f_1 + f_2)(a) = \lambda f_1(a) + f_2(a)$ . L'application  $\varphi$  est donc linéaire.

De plus, si  $f \in E$ , alors  $g = \varphi(f)$  est continue en  $a$  d'après b. et est continue sur  $\mathbb{R} - \{a\}$ . Donc  $g \in E$ .

On conclut que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

3. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ ,

$$\varphi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a} \left[ \frac{(t-a)^{k+1}}{k+1} \right]_x^{2x-a} = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} (x-a)^k.$$

De plus,  $\varphi(d_k)(a) = d_k(a) = 0$ .

Ainsi,  $\varphi(d_k) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$ .

- (b) La famille  $(d_0, \dots, d_n)$  est une famille de  $(n+1)$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  échelonnés en degré (comme cette propriété n'est pas officiellement au programme, le candidat pourra ou pas faire un test de liberté à votre convenance).

On en déduit que la famille est libre, puis qu'elle constitue une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

La linéarité de  $\varphi_n$  est issue de celle de  $\varphi$

Comme  $(d_0, \dots, d_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  et comme pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $\varphi(d_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$\text{Im}(\varphi_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$ .

$\varphi_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$

- (c) Comme  $(d_0, \dots, d_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  formée de vecteurs propres pour  $\varphi_n$ , l'endomorphisme  $\varphi_n$  est diagonalisable.

Attention, si l'on veut utiliser les valeurs propres, il faut montrer qu'elles sont deux à deux distinctes.

Si l'on note  $h : x \mapsto \frac{2^{x+1}-1}{x}$ ,  $h'(x) = \frac{(x \ln(2) - 1)2^{x+1} + 1}{x^2}$ ,  $h$  est strictement croissante sur  $[2; +\infty[$ ,

$h(0) = \frac{1}{2}$ ,  $h(1) = 1$  et  $h(2) = \frac{7}{4}$ , on a bien  $n+1$  valeurs propres deux à deux distinctes.

Puisque  $0 \notin \text{Sp}(\varphi_n)$ ,  $\varphi_n$  est un endomorphisme bijectif de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

4. (a) La fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par composition et produit,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{a\}$  avec :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} \int_x^{2x-a} f(t) dt + \frac{2f(2x-a) - f(x)}{x-a} = \frac{-g(x)}{x-a} + \frac{2f(2x-a) - f(x)}{x-a}.$$

- (b) Si  $x > a$ , alors  $a < x < 2x-a$ , d'où  $g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} (t-a) dt = \frac{1}{2(x-a)} [(t-a)^2]_x^{2x-a} = \frac{3}{2}(x-a)$ .

Si  $x < a$ , alors  $2x-a < x < a$ , d'où  $g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} (a-t) dt = \frac{1}{2(x-a)} [-(t-a)^2]_x^{2x-a} = \frac{3}{2}(a-x)$ .

Il suit que  $g : x \mapsto \frac{3}{2}|x-a|$ , formule encore valable pour  $x = a$ . Cette fonction  $g$  n'est pas dérivable en  $a$ .

- (c) Il suffit de trouver une fonction de  $E$  qui ne soit pas dérivable en un point de  $\mathbb{R} - \{a\}$

La fonction  $h : x \mapsto |x - (a+1)|$  appartient à  $E$ . Si  $h$  admettait un antécédent par  $\varphi$  dans  $E$ ,  $h$  serait dérivable en tout point de  $\mathbb{R} - \{a\}$ , ce qui est faux car  $h$  n'est pas dérivable en  $a+1$ .

On conclut que l'endomorphisme  $\varphi$  n'est pas surjectif.

## Exercice sans préparation E6

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function T=simul(n,a)
Y=grand(1,n,"poi",a);
S=0;
x=1:n;
for k=1:n
    S=S+1/(1+Y(1,k));
    T(1,k)=S/k;
end
plot(x,T)
endfunction
```

A quoi peut-on s'attendre sur la courbe tracée lors de l'appel de cette fonction quand  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n$  est entier plus grand que 1000 ?

### Solution :

Si l'on considère une suite de variables aléatoires  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , suivant une loi de Poisson et que l'on note  $Z_i = \frac{1}{1 + X_i}$

la matrice  $S$  contiendra en  $k$ -ième coordonnée  $\sum_{i=1}^k Z_i$

la matrice  $T$  contiendra en  $k$ -ième coordonnée la moyenne empirique  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_i$ .

Comme les variables  $Z_i$  sont bornées, elles admettent une espérance et une variance on peut appliquer la loi des grands nombres :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) = 0$ .

On peut donc s'attendre à ce que la courbe tracée se rapproche de  $\mathbb{E}(Z)$  ( attention, le programme ne parle pas de "convergence en probabilité" et encore moins de "convergence presque sûre".)

$$\text{Or, } \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a} \frac{a^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-a}}{a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-a}}{a} \times (e^a - 1) = \frac{1 - e^{-a}}{a}$$

La courbe tracée "se rapproche" de  $\frac{1 - e^{-a}}{a}$ .

Si l'on a fini, montrons que la limite trouvée est inférieure ou égal à 1.

\* Par convexité de la fonction exponentielle, on a, pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x$ .

Ainsi :  $1 - e^{-a} \leq a$  et  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) \leq 1$

\* Ou en remarquant que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\frac{1}{1+Y(\omega)} \leq 1$  et  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) \leq 1$ .

# SUJET E7

## Exercice principal E7

Soit  $\varphi$  une fonction continue et positive sur  $]0, +\infty[$  telle que  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge.

On pose  $A = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ .

On définit la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par  $f : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t) dt$ .

1. Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $]0, +\infty[$ . Donner la définition de la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .
2. Déterminer le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et préciser la valeur de  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Donner les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  ce prolongement.
5. On suppose dans cette question que  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Justifier que  $\varphi$  est continue, positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge et préciser sa valeur.
  - (b) Tracer la courbe représentative de  $\varphi$  et préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 1.
  - (c) Tracer la courbe représentative de  $f$  et préciser la courbe au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 1.
6. Compléter fonction Scilab qui en utilisant une fonction `phi()` continue et positive sur  $]0, +\infty[$  déjà programmée, renvoie une valeur approchée de  $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t) dt$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

```
function f=approche(x)
    n=1000;
    t=1/x;
    pas=...
    S= ...
    for i=1:n
        ...
        ...
        ...
    f=S
endfunction
```

---

### Solution :

1.  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $\int_x^1 f(t) dt$  a une limite finie quand  $x$  tend vers 0 et  $\int_1^x f(t) dt$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . (Programme ECE2 page 9)
2.  $\forall x > 0 \quad x \in ]0, 1] \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \geq x$  et  $x \in [1, +\infty[ \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \leq x$ . Donc, comme  $\varphi$  est positive,

$f$ est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$ .
--



3. Soit  $\Phi$  une primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ .  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\Phi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $x \mapsto \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et,  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \varphi(x) + \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \quad \varphi \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc } f'(x) \geq 0 \text{ et } \boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

4. Comme  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \varphi(t) dt = \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt$  donc
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x \varphi(t) dt = - \int_0^1 \varphi(t) dt \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{x}}^1 \varphi(t) dt = - \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -A.$$

On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = -A$ .

5. (a) Il est clair que  $\varphi$  est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  car continue sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et a même limite (qui est 1) à droite et à gauche en 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge (intégrale de Riemann) et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \varphi(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{t} \right]_1^x = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \text{ converge (intégrale de Riemann) et } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \varphi(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} [2\sqrt{t}]_x^1 = 2.$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ converge et } \boxed{A = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 3.}$$

- (b) La courbe représentative de  $\varphi$  est asymptote à l'axe  $Oy$  quand  $x$  tend vers 0 et asymptote à l'axe  $Ox$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et présente un point anguleux d'abscisse 1 avec une demi-tangente de coefficient directeur  $-1/2$  à gauche et une demi-tangente de coefficient directeur  $-2$  à droite.

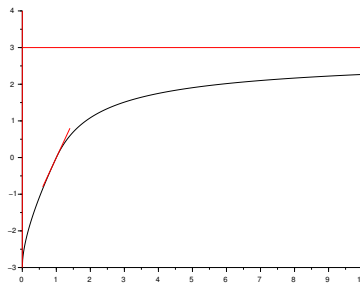
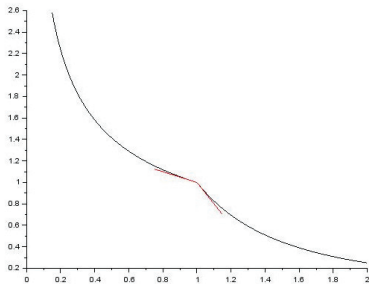
- (c) On prolonge  $f$  par continuité en 0 par  $f(0) = -A = -3$ .

$f$  est continue, croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La courbe est asymptote à la droite d'équation  $y = 3$ .

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \int_{1/x}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}. \text{ et } \forall x \in ]0, 1[, \quad f(x) = -3 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 2. \text{ et } \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2\sqrt{x} + x}{x} \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 et la courbe admet l'axe  $Oy$  comme demi-tangente.



N.B. Le théorème de prolongement de la dérivée n'est pas au programme.

6. Méthode des rectangles, on calcule  $\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{n}\right) \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{1}{x} + k \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{n}\right)\right)$ .

```
pas=(x-1/x)/n;
S=0;
for i=1:n
    S=S+phi(t)*pas;
    t=t+pas
end
```

Note : le programme fonctionne aussi quand  $\frac{1}{x} > x$  et les bornes sont inversées.

## Exercice sans préparation E7

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

1. A l'aide des matrices élémentaire, trouver les valeurs propres de  $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & ab & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}(X = -1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = q = 1 - p \text{ où } p \in ]0, 1[.$$

Déterminer la probabilité que les valeurs propres de  $M = \begin{pmatrix} X & 0 & Y \\ 0 & XY & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix}$  soient toutes positives ou nulles.

3. Même question que pour 2. en supposant que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes telle que

$$X \text{ est à densité de densité } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et } Y \text{ suit la même loi que précédemment.}$$

### Solution :

1.

$$ME_2 = abE_2 \quad M(E_1 + E_3) = (a + b)(E_1 + E_3) \quad M(E_1 - E_3) = (a - b)(E_1 - E_3)$$

$$E_1, E_1 + E_3, E_1 - E_3 \text{ forme une base donc } \boxed{\text{Le spectre de } \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & ab & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \text{ est } \{ab, a + b, a - b\}.}$$

2. La probabilité recherchée est  $\mathbb{P}(XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0)$ .

$$\text{Or } (XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0) = (X = 1, Y = 1).$$

Donc la probabilité recherchée vaut  $\boxed{p^2}$ .

3. Notons  $A$  l'événement  $(XY \geq 0, X + Y \geq 0, X - Y \geq 0)$ .

D'après la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements  $(Y = -1, Y = 1)$ ,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap (Y = -1)) + \mathbb{P}(A \cap (Y = 1)).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X \leq 0, Y = -1, X \geq 1) + \mathbb{P}(X \geq 0, Y = 1, X \geq 1, X \geq -1) \\ &= 0 + \mathbb{P}(X \leq 1, Y = 1) \\ &= p \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx \\ &= \boxed{\frac{pe^{-1}}{2}} \end{aligned}$$

# SUJET E8

## Exercice principal E8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Soient  $a, b, c$  des réels tels que  $0 < a < b < 1$  et  $c \geq 0$ . Soit  $f_{a,b,c}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,b,c}(x) = \begin{cases} c \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \frac{c}{2} \left(1 + \frac{x-1}{1-b}\right) & \text{si } b \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Question de cours. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers une variable aléatoire  $Y$ .
2. Décrire la courbe de  $f_{a,b,c}$  dans le cas général et tracer la courbe de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 4}$ .
3. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
Déterminer  $c$  pour que  $f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c}$  soit une densité de probabilité.  
On note désormais pour  $n \geq 2$ ,  $f_n$  la densité trouvée et  $X_n$  une variable aléatoire admettant  $f_n$  comme densité.
4. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 2}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $Y$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
5. Soient  $a, b, c$  tels que  $f_{a,b,c}$  définisse une densité de probabilité. On suppose que  $b = 0.8$  et que la fonction Scilab `simul` permet de simuler une variable  $X$  dont une densité serait  $f_{a,b,c}$ . Que pensez-vous du script suivant ?

```
W=0;
for i=1:1000
    S=simul();
    if (S<0.8) & (S>W)
        then W=S
    end
end
disp(W)
```

6. (a) Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $f_n(x)$  pour  $x$  réel différent de 0 et 1.  
(b) Quelle est l'espérance  $\mathbb{E}(X_n)$  de  $X_n$ ? Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ ?

On pourra utiliser le résultat suivant :  $\int_b^1 x f_{a,b,c}(x) dx = \frac{c}{12}(1-b)(b+2)$ .

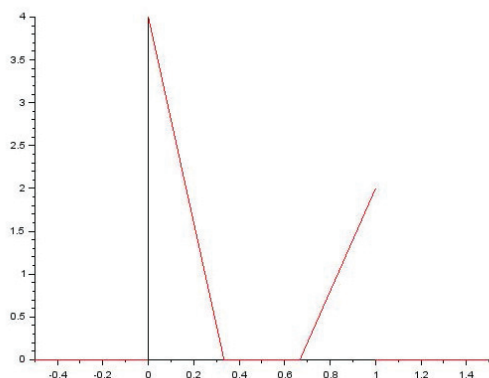
- (c) Comparer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ .

Commentez.

---

### Solution :

1. Programme ECE2 page 17.  
Soit  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$  et  $F$  celle de  $Y$ .  $(X_n)$  converge en loi vers  $Y$  si  $F_n(x)$  tend vers  $F(x)$  pour tout  $x$  où  $F$  est continue.
2.  $f_{a,b,c}$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$ ,  $]a, b[$  et  $]1, +\infty[$ .  
Pour tracer le reste de la courbe on relie les points  $(0, c)$  et  $(a, 0)$  par un segment, ainsi que les points  $(b, 0)$  et  $(1, c/2)$ .



3.  $f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 et en 1, positive sur  $\mathbb{R}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c} = \frac{3c}{4n} \text{ (somme des aires de deux triangles)}$$

Donc  $f_{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, c}$  est une densité de probabilité si et seulement si  $c = \frac{4n}{3}$ .

4.  $\forall x \leq 0, \mathbb{P}(X_n \leq x) = 0$  et  $\forall x \geq 1, \mathbb{P}(X_n \leq x) = 1$ .

$$\forall x \in ]0, 1[, \text{ pour } n \text{ assez grand, } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^{1/n} \frac{4n}{3}(1-nx) dx = \frac{1}{2} \times \frac{4n}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \text{ (aire d'un triangle).}$$

$$\text{Donc } F_n(x) \text{ converge quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ vers } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cette limite est la fonction de répartition  $F_Y$  de la variable  $Y$  de loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{3}$  sauf en 0, où  $F_Y$  n'est pas continue.

$(X_n)$  converge en loi vers  $Y$  qui suit de loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{3}$ .

5. Ce programme considère un échantillon de 1000 réalisations de  $X$  et renvoie la plus grande valeur prise par cet échantillon qui soit inférieure à  $b$ . Cette valeur est probablement proche de  $a$ .

6. (a)  $\forall x \in ]0, 1[ \exists N$  tel que si  $n \geq N$ ,  $\frac{1}{n} < x$  et  $f_n(x) = 0$ . donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Ainsi  $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  pour  $x$  différent de 0 et de 1.

- (b)  $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega) \leq 1$  donc  $\mathbb{E}(X_n)$  existe et  $\mathbb{E}(X_n) \in [0, 1]$ .

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^{1/n} cx(1-nx) dx + \int_b^1 \frac{c}{2}(nx(x-1) + x) dx \quad \text{où } b = 1 - 1/n.$$

$$\text{Or, } \int_0^{1/n} cx(1-nx) dx = c \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{nx^3}{3} \right]_0^{1/n} = c \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} \right) = \frac{c}{6n^2} = \frac{2}{9n}.$$

$$\text{Avec la formule admise : } \int_b^1 xf(x) dx = \frac{c}{12}(1-b)(2+b) = \frac{4n}{3 \times 12} \times \frac{1}{n} \times \left( 3 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3n-1}{9n}.$$

$$\text{Finalement } \mathbb{E}(X_n) = \frac{3n+1}{9n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3}.$$

- (c) Ainsi  $\mathbb{E}(Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3} \neq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$

On ne peut pas intervertir les symboles limites et intégrales.

Il semble bien plus pertinent (au moins sur cet exemple) de définir la convergence en loi en cherchant la limite de la fonction de répartition qu'en cherchant la limite de la densité.

## Exercice sans préparation E8

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

On définit sur  $E$  l'application  $\varphi$  par :

si  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3$

1. Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$  et préciser  $\varphi^{-1}$ .
2. Déterminer  $\varphi^4$ .
3. Quels sont les éléments propres de  $\varphi$  (valeurs propres et sous-espaces propres) ?  $\varphi$  est-elle diagonalisable ?

**Solution :**

1.  $\forall P \in E \quad \varphi(P) \in E$  et  $\varphi$  est linéaire (évident).

Soit  $\psi : a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mapsto a_3X^0 + a_0X + a_1X^2 + a_2X^3$

On a bien :  $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id_E$ .

Donc  $\varphi$  est bijective et  $\varphi^{-1} = \psi$

2.  $\varphi^4 = Id_E$ .

3.  $X^4 - 1$  est un polynôme annulateur de  $\varphi$ . 1 et  $-1$  sont les seules valeurs propres possibles.

- $\varphi(P) = P \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3$  donc 1 est valeur propre et le sous espace propre est  $\text{Vect}(1 + X + X^2 + X^3)$ .
- $\varphi(P) = -P \Leftrightarrow a_0 = -a_1 = a_2 = -a_3$  donc  $-1$  est valeur propre et le sous espace propre est  $\text{Vect}(1 - X + X^2 - X^3)$

Chaque sous-espace propre est de dimension 1 et  $E$  est de dimension 4 donc  $\varphi$  n'est pas diagonalisable.

On peut aussi demander de calculer  $\varphi^k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  (la suite  $(\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est 4-périodique.)

# SUJET E9

## Exercice principal E9

Soit  $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  admettant dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. **Question de cours :** Donner une condition suffisante et une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit diagonalisable.
2. Calculer  $AP$ .
3. A l'aide du calcul de AP répondre aux questions :
  - \* Quelles sont les valeurs propres de  $\varphi$  et les sous espaces propres associés ?
  - \*  $A$  est-elle diagonalisable ?
  - \*  $A$  est-elle inversible ?
  - \*  $P$  est-elle inversible ?
  - \* Déterminer la matrice  $D = P^{-1}AP$ .
4. (a) Soit  $M$  une matrice élément de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $AM = MA$ . Soit  $V$  une matrice colonne propre de  $A$  associée à  $-1$ . Montrer que  $V$  est aussi une colonne propre pour  $M$ .  
(b) Le résultat reste-t-il vrai si  $V$  est une matrice colonne propre de  $A$  associé à  $2$  ?  
On pourra considérer (sans chercher à la calculer explicitement) la matrice  $M = PTP^{-1}$ , où  $T$  est une matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé sur la première ligne et la deuxième colonne.
5. Soient

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = POP^{-1}$$

- (a) Montrer que  $N$  et  $A$  commutent.
- (b) Montrer que  $1$  est valeur propre de  $N$  et que l'espace propre associé à la valeur propre  $1$  est au moins de dimension  $2$ .
- (c)  $N$  est-elle diagonalisable ?

---

### Solution :

1. Programme officiel ECE2, page 7.

Si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égal à  $n$ .

2.  $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (a) Soit  $C_k$  la  $k$ -ième colonne de  $P$ , on déduit du calcul de  $AP$  que :

$$AC_1 = 2C_1 \quad AC_2 = 2C_2 \quad AC_3 = 0C_3 \quad AC_4 = -C_4.$$

Comme les  $C_k$  sont tous non nuls, on en déduit que : 0 est valeur propre de  $A$  et  $C_3$  est une colonne propre associée à 0 ; -1 est valeur propre de  $A$  et  $C_4$  est une colonne propre associée à -1 ; 2 est valeur propre de  $A$  et  $C_1$  et  $C_2$  sont des colonnes propres associées à 2. En notant  $E_\lambda$  le sous espace propre associé à  $\lambda$  :  $\dim E_0 \geq 1$   $\dim E_{-1} \geq 1$   $\dim E_2 \geq 2$  car il est clair que  $(C_1, C_2)$  est libre.

Comme  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ , la somme des dimensions ne peut pas dépasser 4.

$\dim E_0 = 1$  et  $E_0 = \text{Vect}(C_3)$   $\dim E_{-1} = 1$  et  $E_{-1} = \text{Vect}(C_4)$   $\dim E_2 = 2$  et  $E_2 = \text{Vect}(C_1, C_2)$  :

- (b) La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à  $\dim \mathbb{R}^4$  donc  $A$  est diagonalisable.
- (c) 0 est une valeur propre de  $A$  donc  $A$  n'est pas inversible.
- (d)  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  est une base de vecteurs propres donc  $P$  est inversible.
- (e)  $D = \text{Diag}(2, 2, 0, -1)$  est semblable à  $A$  et  $A = PDP^{-1}$

4. Soit  $M$  une matrice élément de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $AM = MA$ .

- (a) Soit  $V$  colonne propre associée à -1. Alors  $AV = -V$ . Donc  $AMV = MAV = -MV$ . D'où  $MV \in E_{-1}$  et comme  $E_{-1}$  est une droite,  $\exists \mu$  tel que  $MV = \mu V$ .  $V$  est donc propre pour  $M$ .  $V$  est aussi un vecteur propre de  $M$ .
- (b) On considère par exemple le vecteur propre représenté par  $C_2$  la deuxième colonne de  $A$  et la matrice  $M$  proposée.

$$AM = PDP^{-1}PTP^{-1} = PDTP^{-1} = MA \text{ car } DT = TD.$$

$AC_2 = -2C_2$ , donc  $C_2$  est un vecteur propre associé à la valeur propre -2

$$\text{Et } MC_2 \text{ est la deuxième colonne de } MP = PTP^{-1}P = PT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $C_2$  est propre pour  $A$  mais pas pour  $M$ .

La propriété est fausse pour les vecteurs de  $E_2$

5. (a)  $O$  et  $D$  commutent donc  $A$  et  $N$  aussi.

- (b)  $V = C_4$  est vecteur propre de  $N$ , on calcule  $NV = V$ . 1 est bien une valeur propre de  $N$ .  
De même  $NC_3 = C_3$  donc  $\dim(E_1(N)) \geq 2$ .
- (c)  $N(C_1 + C_2) = C_1 + C_2$  et  $N(C_1 - C_2) = C_2 - C_1$ .  
Finalement  $\dim(E_1) = 3$  et  $\dim(E_{-1}) = 1$  et  $N$  est diagonalisable.

## Exercice sans préparation E9

Les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .  
On considère la fonction Scilab suivante :

```
function y = X(n)
u = rand()
if u<0.5 then
    y = (sqrt(2*u))/n
    else
    y = (2-sqrt(2-2*u))/n
endfunction
```

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $X_n$  la variable aléatoire simulée par l'appel de la fonction `X(n)`  
Quelle est la fonction de répartition de  $X_n$  ?
2. Etudier la convergence en loi de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Montrer que  $X_n$  est une variable à densité et représenter graphiquement une densité de  $X_2$ .

N.B. On rappelle que `rand()` simule une variable aléatoire  $U$  qui suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .



# SUJET E10

## Exercice principal E10

On rappelle que si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , alors pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^k$  est l'endomorphisme composé de  $f$  par lui-même  $k$ -fois.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\Delta_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. **Question de cours :** Rappeler le théorème du rang.
2. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
(b) Donner la matrice de  $\Delta_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$ . Déterminer  $\text{Im}(\Delta_n)$ .  
(b) A-t-on  $\text{Ker}(\Delta_n) \cap \text{Im}(\Delta_n) = \{0\}$ ?
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta_n^{n+1} = 0$ .
5. Soit  $\tau_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\tau_n = \Delta_n + \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ .  
(a) Montrer que pour tout entier naturel  $j$  et tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\tau_n^j(P) = P(X+j)$ .  
(b) Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $\Delta_n^k(P)$  en fonction des  $\tau_n^j(P)$ .  
(c) Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} P(j) = 0$ .
6. (a) Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ .  
(b) Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer qu'il existe  $S \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $S(X+2) - 2S(X+1) + S(X) = Q(X)$ .

### Solution :

1. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  un espace vectoriel de dimension finie vers  $F$  un espace vectoriel.  
Alors  $\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f)$ . (Programme ECE2 page 6)
2. (a) i.  $\Delta_n(P + \lambda Q) = \Delta_n(P) + \lambda \Delta_n(Q)$ .  
ii. Si  $P$  est un polynôme constant alors  $\Delta_n(P) = 0$ .  
Si  $P$  n'est pas un polynôme constant alors  $\deg(\Delta_n(P)) = \deg(P) - 1$ .  
Donc  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Donc  $\Delta_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(b) Pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $\Delta_n(P) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$

$$\text{mat}(\Delta_n, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 2 & \binom{k}{j} & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & k & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a)  $\text{rg}(\Delta_n) = n$ . Donc d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker}(\Delta_n) = 1$ .  
Or  $1 \in \text{Ker}(\Delta_n)$  et  $\text{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  
Donc  $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$  et  $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

(b) Non.  $\text{Ker}(\Delta_n) \subset \text{Im}(\Delta_n)$

4. On peut soit remarquer qu'en multipliant la matrice par elle-même, la matrice obtenue est triangulaire supérieure avec les coefficients diagonaux et sur-diagonaux nuls. En itérant ce processus,  $\Delta_n^{n+1} = 0$ .

On peut aussi montrer par récurrence que si  $P$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à  $k$ ,  $\deg(\Delta_n^k(P)) = \deg(P) - k$  et si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k - 1$  alors  $\Delta_n^k(P) = 0$ .

Donc  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Delta_n^{n+1}(P) = 0$ .

5. (a) Par récurrence,  $\tau_n^0(P) = P$ . Si  $\tau_n^j(P(X)) = P(X+j)$  alors  $\tau_n^{j+1}(P(X)) = \tau_n(P(X+j)) = P(X+j+1)$ .

(b) Comme  $\tau_n$  et  $\text{Id}$  commutent,  $\Delta_n^k = (\tau_n - \text{Id})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau_n^j$ .

(c) Comme  $\Delta_n^{n+1} = 0$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} \tau_n^j(P) = 0$ .

Ou encore  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} P(X+j) = 0$ .

En particulier en évaluant en 0,  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} P(j) = 0$ .

6. (a) Pour  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , fixé, on pose  $n = \deg(Q+1)$ . On a alors  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Im}(\Delta_n)$

Il existe donc  $P \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(X) = \Delta_n(P(X)) = P(X+1) - P(X)$

- (b) Idée/indication :  $S(X+2) - 2S(X+1) + S(X) = \Delta_n^2(S)$  pour  $S \in \mathbb{R}_n[X]$

Pour  $Q$  fixé on construit  $P$  en a), puis on applique le résultat de la question a) à  $P$  : il existe  $S \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = S(X+1) - S(X)$

On a alors  $P(X+1) - P(X) = S(X+2) - S(X+1) - (S(X+1) - S(X))$

Ainsi pour  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , il existe  $S \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(X) = S(X+2) - 2S(X+1) + S(X)$ .

## Exercice sans préparation E10

Soient  $m, \mu, s$  et  $\sigma$  des réels strictement positifs.

1. Une machine A remplit des sacs de graines. La masse de chaque sac rempli par A est une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(m, s^2)$  d'espérance  $m$  et de variance  $s^2$ .

Une machine B remplit des sacs de graines. La masse de chaque sac rempli par B est une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

On suppose que les variables aléatoires représentant les masses des sacs sont indépendantes.

On achète  $n$  sacs produits par A et  $\nu$  sacs produits par B.

Quelle est la probabilité que la masse moyenne des  $n$  sacs produits par A soit supérieure à la masse moyenne des  $\nu$  sacs produits par B ?

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$m = 101, \quad s = \sqrt{6}, \quad \mu = 99, \quad \sigma = \sqrt{5}, \quad n = 4 \quad \nu = 2.$$

On donne  $\sqrt{6} \approx 2,45$   $\sqrt{5} \approx 2,24$

Si  $\Phi$  étant la fonction de répartition d'une variable gaussienne centrée réduite :

$$\Phi(0,5) \approx 0,69 \quad \Phi(1) \approx 0,84 \quad \Phi(1,5) \approx 0,93 \quad \Phi(2) \approx 0,98$$

2. Compléter la fonction Scilab suivante qui si on lui donne  $m, \mu, s, \sigma, n$  et  $\nu$  renvoie une valeur approchée de la probabilité que la masse moyenne des  $n$  sacs produits par A soit supérieure à la masse moyenne des  $\nu$  sacs produits par B ?

```
function P=proba(m,mu,s,sigma,n,nu)
X=grand(1000,n,"nor",m,s);
Y=grand(1000,nu,"nor",mu,sigma);
...
for i=1:1000
    T=0;
    for j=1:n
        T=T+X(i,j)
    end
    ....
    ....
    ...
    ...
    ...
end
end
...
endfunction
```

---

**Solution :**

1. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les variables aléatoires représentant les masses des  $n$  sacs fournis par A,  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$Y_1, Y_2, \dots, Y_\nu$  les variables aléatoires représentant les masses des  $\nu$  sacs fournis par B et  $\bar{Y}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^\nu Y_i$ .

Comme les  $X_i$  sont indépendantes,  $\bar{X}_n$  suit une loi normale.

Par linéarité  $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = m$  et par indépendance  $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n s^2 = \frac{s^2}{n}$  et  $\bar{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{s^2}{n}\right)$ .

De même  $\bar{Y}_\nu \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$ .

D'après le lemme des coalitions,  $\bar{X}_n$  et  $\bar{Y}_\nu$  sont indépendantes donc  $\bar{X}_n - \bar{Y}_\nu$  suit aussi une loi normale. On calcule les espérance et les variances.

$$Z = \bar{X}_n - \bar{Y}_\nu \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m - \mu, \frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}\right).$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0) \text{ (variable à densité)}$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Z - (m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}} \leq -\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right) = \Phi\left(\frac{(m - \mu)}{\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}}}\right)$$

Application numérique :

$$m - \mu = 2$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{5}{2}} = 2$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \bar{Y}_\nu) = \Phi(1) \approx 0,84.$$

```
2. function P=proba(m,mu,s,sigma,n,nu)
X=grand(1000,n,"nor",m,s);
Y=grand(1000,nu,"nor",mu,sigma);
C=0;
for i=1:1000
    T=0;
    for j=1:n
        T=T+X(i,j)
    end
    V=0;
    for j=1:nu
        V=V+Y(i,j)
    end
    if T/n>=V/nu then C=C+1;
end
end
P=C/1000
endfunction
```