Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2014.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S 49

Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

2. Dans cette question, on note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition de Z.
Pour tout réel θ, on note P_θ la loi de la variable aléatoire $Y_\theta = (Z+\theta)^2$.
a) Exprimer la fonction de répartition de Y_θ à l'aide de Φ.
b) La variable aléatoire Y_θ possède-t-elle une densité ?
c) Reconnaître la loi P_0.
d) Montrer que pour tout réel $\theta \geqslant 0$, les lois P_θ et $P_{-\theta}$ sont identiques.

3.a) Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Établir pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, l'inégalité :

$$P\big(\big|\sqrt{X}-a\big| \geqslant b\big) \leqslant P\big(\big|X-a^2\big| \geqslant ab\big)$$

b) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'estimateurs d'un paramètre positif inconnu θ, ne prenant tous que des valeurs positives ou nulles.
Déduire de la question précédente que $(\sqrt{T_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un suite convergente d'estimateurs du paramètre $\sqrt{\theta}$.

4. Dans cette question, θ désigne un paramètre positif inconnu et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune P_θ définie dans la question 2.
a) Trouver une suite convergente d'estimateurs sans biais $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\varphi_n(X_1,\ldots,X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du paramètre θ^2.
b) En déduire une suite convergente d'estimateurs du paramètre θ. Sont-ils sans biais ?

Exercice sans préparation S 49

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 et soit D une droite vectorielle de E stable par f.
a) Montrer que D admet un supplémentaire stable par f.
b) Montrer que si P est un supplémentaire de D stable par f, la restriction de f à P définit un endomorphisme diagonalisable de P.

Exercice principal S 50

1. Question de cours : Formule du binôme négatif.

2. Soit $p \in]0,1[$. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $p_{n,k}$ la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ soit égale à k.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,0}$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,k} = \frac{1}{p}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, mutuellement indépendantes et de même loi.

On pose : $S_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour tout $(a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$, on pose : $F_n(a) = P[S_n \leqslant a]$.

3. Soit $a > 0$. On note $N(a) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N}\ ;\ S_n \leqslant a\}$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $N_a(\omega)$ est le nombre, éventuellement égal à $+\infty$, des entiers n pour lesquels $S_n(\omega) \leqslant a$).

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $[N(a) = n] \in \mathcal{A}$ et que $P\big[N(a) = n\big] = F_{n-1}(a) - F_n(a)$.

b) Exprimer l'événement $\big[N(a) < \infty\big]$ en fonction des événements $\big([N(a) = n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que $\big[N(a) < \infty\big] \in \mathcal{A}$.

c) Montrer que la suite $\big(F_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(a) = 0$ si et seulement si $P\big[N(a) < \infty\big] = 1$.

d) On suppose dans cette question que la série de terme général $F_n(a)$ est convergente.

Montrer que la variable aléatoire $N(a)$ admet une espérance et que $E\big(N(a)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a)$.

4. Soit p et q deux réels vérifiant $0 < q < p < 1$. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X_n = 0) = 1 - p$ et $P(X_n = 1) = q$.

En utilisant les questions précédentes et en considérant les variables aléatoires $Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n = 0 \\ 1 & \text{si } X_n \geqslant 1 \end{cases}$, montrer que pour tout $a > 0$, on a : $E\big(N(a)\big) \leqslant \dfrac{\lfloor a \rfloor + 1}{p}$.

Exercice sans préparation S 50

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$; on note $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sqrt{n}$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E$ vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.

2. Soit x et y deux vecteurs de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E$ vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k e_k$.

Exercice principal S 56

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Question de cours : Soit h une fonction numérique de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

a) Qu'appelle-t-on point critique de h ?

b) Qu'appelle-t-on point critique pour l'optimisation de h sous contraintes d'égalités linéaires

$$\mathcal{C} \begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ \cdots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels donnés non tous égaux, de moyenne $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

On pose : $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\alpha_i = \frac{x_i - \overline{x}}{ns^2}$.

a) Montrer que s^2 est strictement positif.

b) Exprimer en fonction de s^2, le minimum global de la fonction $\phi : t \mapsto f(x_1 - t, \ldots, x_n - t)$.

c) Soit ρ et θ deux réels donnés.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul point critique $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ pour l'optimisation de f sous les contraintes $\sum_{i=1}^{n} u_i = \rho$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \theta$, donné par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i^* = \frac{\rho}{n} + (\theta - \rho\, \overline{x})\, \alpha_i$.

3. Soit n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ discrètes, mutuellement indépendantes, admettant des moments d'ordre 1 et 2 telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(Y_i) = ax_i + b$ et $V(Y_i) = 1$, où a et b sont des paramètres réels.

On considère les variables aléatoires de la forme $A_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} r_i Y_i$, où $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ indépendant de a et de b (mais qui peut dépendre de $x_1, \ldots, x_n$).

a) Trouver, parmi les variables aléatoires $A_n^{(r)}$ qui vérifient pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E\big(A_n^{(r)}\big) = a$, celles qui ont la plus petite variance.

Proposer une interprétation de ce résultat en terme d'estimation du paramètre a.

b) Énoncer et démontrer un résultat similaire pour le paramètre b.

Exercice sans préparation S 56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Exercice principal S 61

1. Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

2. Soit U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Déterminer une densité g de $U+V$. Donner l'allure du graphe de g.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Pour tout élément $f \in \mathcal{E}$, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, T(f)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Montrer que l'application T qui, à tout $f \in \mathcal{E}$ associe $T(f)$, est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

4. Montrer que si un élément $f \in \mathcal{E}$ est une densité de probabilité, alors $T(f)$ est également une densité de probabilité.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, identifiés à des fonctions polynômes.

a) Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme T_n est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

6. L'endomorphisme T est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Exercice sans préparation S 61

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice principal S 75

1. Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss. Application à la factorisation de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit a, b et c des réels et T le trinôme $T(X) = aX^2 + bX + c$. On note T' et T'' respectivement, les dérivées première et seconde de la fonction T.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b et c pour que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $T(x) \geqslant 0$.

b) On suppose que T possède deux racines réelles distinctes. Déduire de la question précédente que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ T(x)T''(x) \leqslant (T')^2(x)\,.$$

Dans la suite de l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

On pose : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note P' et P'' respectivement, les dérivées première et seconde de P.

3. Montrer que P' possède $(n-1)$ racines réelles distinctes.

4.a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ est décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x)P''(x) \leqslant (P')^2(x)$.

5. À l'aide des questions précédentes, établir pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, l'inégalité : $a_k\, a_{k+2} \leqslant a_{k+1}^2$.

Exercice sans préparation S 75

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{(i+j+1)!}\,.$$

Déterminer le réel a. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S 91

1. Question de cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathbb{R}_n[T]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Que peut-on dire d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[T]$ qui admet plus de n racines ?

2. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels tous distincts.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & x_{n-1} & & & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $AU = 0$.

a) Montrer que le polynôme $Q(T) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{j-1}$ est nul.

b) En déduire que la matrice A est inversible.

3. Dans cette question, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et p' ($0 < p < 1$ et $0 < p' < 1$) et telles que la covariance de X et Y est nulle.
Montrer que X et Y sont indépendantes.

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, et soit n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.
On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$:

$$p_i = P(X = x_i), \quad q_j = P(Y = y_j), \quad \pi_{i,j} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \quad \text{et} \quad \delta_{i,j} = \pi_{i,j} - p_i q_j$$

On suppose que pour tout $h \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la covariance de X^h et Y^k est nulle.

a) Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \delta_{i,j} y_j^k = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice sans préparation S 91

Soit α un réel donné. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice principal S 93

1. Question de cours : Formule de l'espérance totale pour une variable aléatoire discrète X et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $E(X/A_n)$ l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_{A_n}.

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage.
Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

2.a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.

b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\mathrm{Inf}(T_1, T_2)$ et $\mathrm{Sup}(T_1, T_2)$.

3. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$.

4.a) Établir, pour tout $i \in [\![2, 6]\!]$, la relation : $E(T_1/[X_1 = i]) = 7$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![3, 6]\!]$, on a : $E(T_1T_2/[X_1 = i]) = E\big((1 + T_1)(1 + T_2)\big)$.

c) Calculer $E(T_1T_2)$.

d) En déduire $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.

5.a) Trouver un réel α tel que les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.

b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T_2 + \alpha T_1/[T_1 = 1])$.

c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?

Exercice sans préparation S 93

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\tan x\big)^{n+2}\, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2.a) Calculer $u_{n+2} + u_n$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S 94

1. Question de cours : a) Convergence des séries de Riemann.

b) Établir l'encadrement strict suivant : $1 < \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$. On rappelle que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, cotan $x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

2.a) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a : $e^{2ix} = \dfrac{\operatorname{cotan} x + i}{\operatorname{cotan} x - i}$.

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\operatorname{cotan} x_k + i)^{2n+1}$ est un nombre réel.

3. Soit P_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$.

a) Préciser le degré de P_n ainsi que son terme de plus haut degré.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer (sous forme de somme) la partie imaginaire de $(t+i)^{2n+1}$. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{cotan}^2 x_k$ est une racine de P_n et donner une factorisation de $P_n(X)$ sous la forme d'un produit de monômes.

c) Établir la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$.

4.a) Montrer que pour tout $u \in]0, \pi/2[$, on a : $\operatorname{cotan}^2 u < \dfrac{1}{u^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 u$.

b) Déduire des résultats précédents que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice sans préparation S 94

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.
Soit N une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$, suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$).
On pose : $M_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si } [N = 0] \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si } [N = k] \text{ est réalisé} \end{cases}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice principal S 101

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

On note :

• U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;

• $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que U soit un vecteur propre de A et de ${}^tA$;

• $\mathcal{W}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall\, i \geqslant 2$, $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.

On admet sans démonstration que $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{W}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien.

2. Déterminer la dimension de $\mathcal{W}_n$.

3. Soit $A \in \mathcal{V}_n$. On note λ (respectivement μ) la valeur propre de A (resp. de ${}^tA$) associée au vecteur propre U. Exprimer la somme de tous les coefficients de A en fonction de λ. Comparer λ et μ.

4.a) Déterminer $\mathcal{V}_2$ ainsi que sa dimension.

b) Montrer que pour tout $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, il existe une unique matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ de $\mathcal{V}_3$ telle que $a_{1,1} = a$, $a_{1,2} = b$, $a_{1,3} = c$, $a_{2,1} = d$ et $a_{2,2} = e$. En déduire la dimension de $\mathcal{V}_3$.

5. Soit $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}U$.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note C_j la j-ième colonne de P. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence d'une telle matrice P.

b) Montrer que la matrice $B = {}^tPAP$ a pour terme général $b_{i,j} = \langle C_i, AC_j\rangle$.

c) En déduire que $A \in \mathcal{V}_n$ si et seulement si ${}^tPAP \in \mathcal{W}_n$.

d) En déduire la dimension de $\mathcal{V}_n$.

Exercice sans préparation S 101

Soit $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$: X_1 suit la loi binomiale de paramètres (n_1, p) et X_2 suit la loi binomiale de paramètres (n_2, p).

1. Soit $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[X_1 + X_2 = n]$.

2. Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1/X_1 + X_2 = n)$.

Exercice principal S 104

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Quelle est, selon les valeurs des réels a, b, c et d le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Dans tout l'exercice, X, Y et Z sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2.
On admet que chacune des variables aléatoires XY, XZ et YZ admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée : $E(X^2)E(Y^2) - \big(E(XY)\big)^2 \neq 0$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = E\big((Z - xX - yY)^2\big)$.

2.a) Établir les inégalités strictes : $E(X^2) > 0$ et $E(Y^2) > 0$.
b) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a : $E\big((xX + yY)^2\big) > 0$.

3.a) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0).

b) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $E\big((Z - x_0X - y_0Y)(xX + yY)\big) = 0$.

c) En déduire l'égalité : $E\big((Z - xX - yY)^2\big) = E\big((Z - x_0X - y_0Y)^2\big) + E\big([(x - x_0)X - (y_0 - y)Y]^2\big)$.

d) Étudier les extremums de f.

4. Dans cette question, on suppose que X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose $Z = X^2$.
Déterminer l'ensemble des couples (x_0, y_0) pour lesquels $E\big((Z - xX - yY)^2\big)$ est minimale.
(on admet que le résultat relatif à l'espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes s'applique au cas où les deux variables aléatoires sont à densité)

Exercice sans préparation S 104

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$.

Montrer que M est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice principal S 110

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe un entier $m \geqslant 2$, des endomorphismes $p_1, p_2, \ldots, p_m$ non nuls de E et m réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tels que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(f)$ en fonction des $P(\lambda_i)$ et des p_i pour $i \in [\![1, m]\!]$.

3. Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $Q(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$. Calculer $Q(f)$.
Qu'en déduit-on quant aux valeurs propres de f ?

4. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on pose : $L_k(X) = \prod_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ i \neq k}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$.
Calculer $L_k(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(p_k) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \,\mathrm{id})$ ainsi que l'ensemble des valeurs propres de f.

5. Montrer que f est diagonalisable.

6. Vérifier que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$.

7. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (ensemble des endomorphismes de E) engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.
Déterminer la dimension de F.

Exercice sans préparation S 110

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite, et soit un nombre réel $\theta \neq 0$. On pose : $Y_0 = X_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.

2. Calculer pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+h})$.

Exercice principal S 112

1. Question de cours : Énoncer le théorème du prolongement de la dérivée.

On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \big(f'(x)\big)^2 - 2f(x)f''(x) = 0 \qquad (E)$$

2. Soit (a, b) un couple de réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ b\,x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que la fonction f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation (E) ?

3.a) Montrer que si une fonction polynomiale non nulle f vérifie (E), son degré est nécessairement égal à 0 ou 2.

b) Déterminer sous forme factorisée, les fonctions polynomiales qui vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation (E).

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

On suppose que f vérifie les conditions $(\mathcal{C})$ suivantes :

- la dérivée f' ne s'annule pas sur I ;
- la relation (E) est vérifiée pour tout $x \in I$.

a) On pose pour tout $x \in I$: $g(x) = \dfrac{f(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$. Calculer pour tout $x \in I$, la dérivée $g'(x)$ au point x.

b) Établir l'existence d'une constante réelle k strictement positive telle que pour tout $x \in I$, la dérivée de $\sqrt{f(x)}$ soit égale à $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

c) En déduire que toutes les fonctions f qui vérifient les conditions $(\mathcal{C})$ sont de la forme : $f(x) = \alpha(x-r)^2$, avec $\alpha \neq 0$ et $r \notin I$.

Exercice sans préparation S 112

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de X et en trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S 113

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire canonique $\langle\, ,\, \rangle$ et de la norme associée $\| \,.\, \|$.
Soit p et r deux projecteurs orthogonaux distincts de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. Question de cours : Définition et propriétés d'un projecteur orthogonal.

2. *Dans cette question uniquement*, on suppose que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer ses valeurs propres.

c) Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(r)$ et $\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(r)$.

3. Soit x un vecteur propre de $p \circ r$ associé à la valeur propre λ.

a) Dans le cas où $\lambda \neq 0$, montrer que $x \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $\big(r(x) - \lambda x\big) \in \operatorname{Ker}(p)$.

b) Calculer $\langle x, r(x) - \lambda x \rangle$. En déduire l'encadrement : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

4. On suppose que l'ensemble des valeurs propres de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
On pose $p_1 = p$, $p_2 = \mathrm{id} - p$ et pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}$, on pose $a_{i,j} = p_i \circ r \circ p_j$.

a) Calculer $a_{1,1} + a_{1,2}$, $a_{1,1} + a_{2,1}$ et $a_{1,2} \circ a_{2,1} - (\mathrm{id} - p \circ r) \circ a_{1,1}$.

b) Montrer que $a_{1,1}$ est diagonalisable.

c) Montrer que p et r commutent.

Exercice sans préparation S 113

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de $V_0 = \inf\{V(X)\,;\, X \in \mathcal{E}\}$.

2. On suppose que pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$, on a $\dfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathcal{E}$.
Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ avec $V(X_1) = V(X_2) = V_0$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement.

Exercice principal S 116

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. On note F la fonction de répartition de X_1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Y_k = -\ln X_k$.

2.a) Calculer pour tout $s \in \mathbb{N}$, $E(Z_n^s)$.

b) Quelle est la loi de Y_1 ?

c) En déduire la loi de $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

d) Déterminer une densité f_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n.

3. Soit r un entier naturel et $z \in]0,1]$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^z \big(-\ln t\big)^r \,\mathrm{d}t$.

b) À l'aide du changement de variable $y = -\ln t$ dont on justifiera la validité, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{r!}\int_{-\ln z}^{+\infty} y^r\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = z\times\sum_{k=0}^{r}\frac{(-\ln z)^k}{k!}\,.$$

c) En déduire la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S 116

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXAX > 0$.

2. Justifier que A est diagonalisable et inversible.

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice principal E 26

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.

Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = P\big((X = i) \cap (Y = j)\big)$.

Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X = i)x^i$ et $F_Y(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} P(Y = j)x^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}\, x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\, x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. $\big($on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - P(X = i)P(Y = j)\big)$

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X, Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice sans préparation E 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A A^t A A = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est symétrique.

2. Déterminer A.

Exercice principal E 31

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\,\mathrm{e}^x\,.$$

2. On note : $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\operatorname{Im}\Phi$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0\,.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e}-1)f'(x)$.

Exercice sans préparation E 31

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1.a) Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice principal E 38

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto ad - bc \qquad \text{et} \qquad T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto a + d\,.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.
b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer Ker D et Ker T. Quelle est la dimension de Ker T ?

Dorénavant, si $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E, on note : $D(u) = D(A)$ et $T(u) = T(A)$.

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathcal{L}(E) |\, u \circ v - v \circ u = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \neq 0$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{L}(E) |\, u \circ v - v \circ u = u\}$.
a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif. En déduire une condition nécessaire portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.
b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u s'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.
c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice sans préparation E 38

Soit k et λ deux réels et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} k\,t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Exprimer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre n que l'on calculera.

Exercice principal E 39

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, telles que :

$$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P\big([X=i] \cap [Y=j]\big) = c\,\frac{i+j}{i!j!}\,.$$

2.a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $P(X=i) = c\,\dfrac{(i+1)}{i!}$ e. En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3.a) Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$. Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose : $g_A(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,P_A(Y=k)$.

Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f\big(Z(\omega)\big)$.

Exercice sans préparation E 39

1. La somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable ?
2. La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?
3. Montrer que toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

Exercice principal E 43

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

Dans tout l'exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, notées λ_1, λ_2 et λ_3.

1. Question de cours : Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.

2.a) Donner en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3, un polynôme annulateur de A de degré 3.

b) Peut-on trouver un polynôme annulateur de A de degré 1 ou de degré 2 ?

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le triplet $\big(P(\lambda_1^5), P(\lambda_2^5), P(\lambda_3^5)\big)$.

a) Montrer que l'application φ est linéaire.

b) Déterminer Ker φ.

c) L'application φ est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$?

d) Établir l'existence d'un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $Q(\lambda_i^5) = \lambda_i$.

e) Soit T le polynôme défini par : $T(X) = Q(X^5) - X$.

Montrer que le polynôme T est un polynôme annulateur de A.

4. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \backslash\, AN = NA\} \text{ et } \mathcal{F} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \backslash\, A^5N = NA^5\}\,.$$

Déduire des questions précédentes que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Exercice sans préparation E 43

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

1. Déterminer la loi de M_n.

2. Montrer que l'application g qui à tout réel x associe $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x})$ est une densité de probabilité.

3. Soit Y une variable aléatoire définie sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ de densité g.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(\lambda M_n - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y.

Exercice principal E 46

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement supérieur à 1.

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$ est convergente. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$.

b) Établir la convergence de la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n(a) = a\,n\big(u_n(a) - u_{n+1}(a)\big)$. En déduire $u_n(a)$ en fonction de $u_1(a)$.

b) Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{u_n(a)}{a\,n}\right)$ est convergente.

c) En déduire la limite de la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a) = \ln\big(u_n(a)\big) + \dfrac{\ln n}{a}$.

a) Montrer que la série de terme général $\big(w_{n+1}(a) - w_n(a)\big)$ est convergente.

b) En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\dfrac{K(a)}{n^{\frac{1}{a}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E 46

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}, P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice principal E 47

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où a est un réel strictement positif et α un réel quelconque.

Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2.a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{1}{2x^2}$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(x)\big)\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ.

a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right]\right)$.

Exercice sans préparation E 47

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.
2. En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice principal E 49

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

2.a) Montrer que $2f - f^2 = \mathrm{id}$.

b) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme. Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

c) Montrer que f admet l'unique valeur propre $\lambda = 1$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

3.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

b) Le résultat précédent s'étend-t-il au cas où $n \in \mathbb{Z}$?

4. Déterminer une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice sans préparation E 49

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.

Exercice principal E 63

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 1 colonne à coefficients réels.
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = AX$.
a) Déterminer une base de Ker u et une base de Im u.
b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
c) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n.

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $v(M) = AM$.
On note $\mathcal{B} = \big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\big)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire la matrice V de l'endomorphisme v dans la base $\mathcal{B}$.
b) Déterminer une base de Ker v et une base de Im v.
c) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation E 63

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ contenant chacune trois boules. Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est rouge, les autres étant bleues.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules bleues dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que l'urne U_2 contienne la boule rouge ?

3. SUJETS DE L'OPTION TECHNOLOGIQUE

Exercice principal T 11

1. Question de cours : Définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

2. Établir l'égalité : $I_1 = 1 - \ln 2$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n par : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{1+x^n} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Établir , pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence d'un réel a_n tel que la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = a_n f_n(x)$ soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité X_n.
b) Quelle est la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$?

5.a) Calculer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\dfrac{x^2}{1+x} = ax + b + \dfrac{c}{1+x}$.
b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire X_1.

6.a) Établir pour tout $x \in [0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nI_n}{\ln 2} = 1$.

Exercice sans préparation T 11

Soit A, D et P les matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
b) Calculer AP et PD. En déduire que $A = PDP^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, calculer A^n.

Exercice principal T 12

1. Question de cours : Définition d'une matrice inversible.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices A carrées d'ordre 2 pour lesquelles il existe une matrice B carrée d'ordre 2 telle que $B^2 = A$. On note I la matrice identité d'ordre 2.

2. Montrer que si $B^2 = A$, alors $AB = BA$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer B^2.

b) En déduire que pour tout réel r, on a : $rI \in \mathcal{C}$.

4. Soit a et b deux réels distincts et $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les matrices qui commutent avec A (deux matrices X et Y commutent si $XY = YX$).

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A appartienne à $\mathcal{C}$.

5. Pour chacune des deux matrices suivantes, indiquer si elle appartient à $\mathcal{C}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 appartenant à $\mathcal{C}$ et soit P une matrice inversible d'ordre 2, d'inverse P^{-1}. On pose : $D = P^{-1}A\,P$. Montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice sans préparation T 12

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f est donnée par : $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice principal T 13

1. Question de cours : Définition d'une fonction convexe.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

2.a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Étudier la convexité de la fonction f.

c) Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On précisera les branches infinies de cette courbe.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par : $u_0 > 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice sans préparation T 13

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques à l'aide de deux machines A et B.
La machine A fabrique 20% des pièces et la machine B fabrique 80% des pièces. La proportion de pièces défectueuses fabriquées par A est de 5% et par B de 2%.
On effectue des tirages au hasard avec remise d'une pièce dans l'ensemble de la fabrication.

1. Calculer la probabilité de tirer une pièce défectueuse.

2. À l'issue d'un certain tirage, la pièce tirée est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par la machine A ?

4. SUJETS DE L'OPTION B/L

Exercice principal B/L 10

1. Question de cours : Lien entre convergence et convergence absolue d'une intégrale.

2.a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente. On la note I_p.

b) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p ; en déduire la valeur de I_p en fonction de p.

3. Établir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x$. On la note J_p.

4.a) Pour tout $(p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X x^p\, \mathrm{e}^{-kx}\, \mathrm{d}x$.

b) Justifier pour tout $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$.

c) Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, A > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^A \frac{x^p \mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p}$.

d) Établir la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x > 0$, $\displaystyle \frac{x^p}{\mathrm{e}^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} + \frac{x^p \mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}$.

e) En déduire l'encadrement : $\displaystyle 0 \leqslant J_p - p\,! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p}$.

5. Rappeler pour quelles valeurs de p la série de terme général $\dfrac{1}{k^{p+1}}$ est convergente.

Pour ces valeurs, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$ en fonction de J_p.

Exercice sans préparation B/L 10

Un jouet fonctionne avec une pile de type A et deux piles de type B. Le jouet peut continuer à fonctionner si l'une des piles B est déchargée. On suppose que les durées de vie des piles sont mutuellement indépendantes et que la durée de vie de chacune d'entre elles suit un loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Quelle est la loi de la durée de vie du jouet ?

Exercice principal B/L 14

1. Question de cours : Propriétés de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, où h est une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle I contenant a.

Dans tout l'exercice, f est une fonction dérivable sur $[0,1]$ et φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^1 t f(xt)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (1)$$

2.a) Montrer que φ est continue et dérivable sur $]0,1]$. On note φ' la dérivée de φ.
À l'aide du changement de variable $u = xt$, exprimer φ' en fonction de φ et de f.

b) Soit G la fonction définie sur $[0,1]$ par : $G(x) = \displaystyle\int_0^x u f(u)\,\mathrm{d}u$.
Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de G au voisinage de 0, puis la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0.
La fonction φ est-elle continue en 0 ?

3. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$.
b) On associe à f la fonction φ définie par la relation (1).
Est-il possible de déterminer un réel k tel que la fonction $k\varphi$, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}\backslash[0,1]$, soit une densité de probabilité ?

Exercice sans préparation B/L 14

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y est donnée par :

$$P(Y=1) = P(Y=0) = P(Y=-1) = \frac{1}{3}\,.$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note F_Z la fonction de répartition de Z.

1. Déterminer pour tout x réel, $F_Z(x)$ (on distinguera les trois cas $x < 0$, $x > 0$ et $x = 0$).

2.a) Donner la valeur de $P(Z = 0)$.
b) La variable aléatoire Z est-elle discrète ? Est-elle à densité ?