Préparation Oral HEC

24/05/2024

Corrigé

Exercice avec préparation (E47, 2014)

1. Cours... redonner la définition puis se concentrer sur les théorèmes de comparaison.
   Critère de Riemann : cv ssi $\alpha > 1$.

2. (a) L'inégalité de gauche est évidente car Φ est à valeurs dans $[0,1]$.
   T admet une variance (égale à 1) et est d'espérance nulle, donc BT s'écrit $P(|T| \geqslant x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$. Or

   $$P(|T| \geqslant x) = P(T \leqslant -x) + P(T > x) = \Phi(-x) + (1 - \Phi(x)) = 2(1 - \Phi(x))$$

   ce qui donne l'inégalité de droite

   (b) $x \mapsto 1 - \Phi(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$; par comparaison avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ (Riemann cv) l'intégrale en $+\infty$ converge.
   On se place sur $[0, A]$ et on fait une IPP, en dérivant $1 - \Phi(x)$ et en intégrant 1 :

   $$\int_0^A (1 - \Phi(x))\,dx = \left[x(1 - \Phi(x))\right]_0^A + \int_0^A x\varphi(x)\,dx$$

   Alors pour $A \to +\infty$:
   - $\displaystyle\int_0^A x\varphi(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (cv + calcul direct avec l'expression de φ)
   - $\left[x(1 - \Phi(x))\right]_0^A = A(1 - \Phi(A))$; avec la question précédente $0 \leqslant A(1 - \Phi(A)) \leqslant \dfrac{1}{2A}$ donc tend vers 0 en $A \to +\infty$.

   Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3. (a) Comme $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, on voit que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

   (b) Question bien compliquée dans laquelle on peut facilement partir sur des fausses pistes et tourner très longtemps en rond.

   Il faut tout d'abord faire apparaître une intégrale : on remarque que $1 - \Phi(x) = P(T > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.
   Ensuite on écrit $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_x^{+\infty} -\frac{\varphi'(t)}{t}\,dt$ et on effectue une IPP (en passant par l'intermédiaire $\displaystyle\int_x^A (\dots)$, $A > 0$ quelconque) qui dérive $1/t$ et intègre φ'. On trouve

   $$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}$$

   Ceci donne bien $1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$ soit l'inégalité de droite (en divisant par $\varphi(x) > 0$).

   Pour la suite, on réutilise $\varphi(t) = -\varphi'(t)/t$ et une nouvelle IPP qui intègre φ' et dérive $1/t^3$:

   $$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^3} = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^3} + 3\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\,dt \geqslant \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^3}$$

   ce qui donne l'inégalité de gauche.

(c) En multipliant par x l'inégalité précédente et avec gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = 1$, ce qui donne $1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$.

4. En utilisant $a>0$,

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{T}>x]}\left[\mathrm{T}>x+\frac{a}{x}\right] = \frac{\mathrm{P}\left(\left[\mathrm{T}>x+\frac{a}{x}\right]\cap[\mathrm{T}>x]\right)}{\mathrm{P}([\mathrm{T}>x])} = \frac{\mathrm{P}\left(\left[\mathrm{T}>x+\frac{a}{x}\right]\cap[\mathrm{T}>x]\right)}{\mathrm{P}([\mathrm{T}>x])} = \frac{\mathrm{P}\left(\left[\mathrm{T}>x+\frac{a}{x}\right]\right)}{\mathrm{P}([\mathrm{T}>x])} = \frac{1-\Phi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{1-\Phi(x)}$$

Pour $x\to+\infty$, x et $x+\frac{a}{x}$ tendent vers $+\infty$ et l'équivalent de la question précédente s'applique :

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{T}>x]}\left[\mathrm{T}>x+\frac{a}{x}\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\varphi(x)}\frac{\varphi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{x+\frac{a}{x}} = \frac{x}{x+\frac{a}{x}}\frac{\varphi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{\varphi(x)}$$

Or, en reprenant l'expression explicite : $\dfrac{\varphi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{\varphi(x)} = e^{-a-\frac{a^2}{2x^2}}$.

Finalement, en prenant les limites, la limite recherchée est e^{-a}.

Exercice sans préparation (E9, 2021)

Soient $p\in]0,1[$ et la fonction Python suivante

```python
import numpy.random as rd
def X(p):
    k = 1
    y = 0
    a = rd.random()
    while a > p:
        y = y+1
        k = k+1
        a = rd.random()
    while a <= p:
        k = k+1
        a = rd.random()
    return k-1-y
```

1. `k` compte le nombre de lancers effectués.
La première boucle `while` tourne tant qu'on obtient « Pile » (`rd.random()>=p`, événement contraire de `rd.random()<p` de proba p qui correspond à l'obtention de « Face »).
y compte donc la longueur de la 1ère séquence de Pile (et vaudra 0 si on commence par un Face).
Ensuite, la seconde boucle `while` tourne tant qu'on obtient Face.
Au final `k-1-y` est la longueur de la première séquence de « Face » .

NB1 : le programme peut tourner indéfiniment si on n'obtient jamais de Face, événement notoirement de proba nulle (conséquence des théorèmes de limite monotone HP ; ou en observant que si T est la va donnant le rang du 1er Face, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}=k)$ car $\mathrm{T}\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$).

NB2 : notons que ce programme est grotesque : il aurait été bien plus simple de compter le nombre de tours de la seconde boucle... ce sont les aléas du concours.

2. (a) Premièrement $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (la première séquence de Face contient au moins un Face (!), et peut être arbitrairement longue).
En notant P_i (resp. F_i) l'événement « obtenir Pile (resp. Face) au i-ème lancer), on a

$$(X = k) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Big([P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_i] \cap [F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{i+k}] \cap P_{i+k+1} \Big)$$

et par indépendance des divers lancers et incompatibilité de l'union :

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} q^i p^k q = p^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+1} = p^k \frac{q}{1-q} = p^{k-1} q$$

avec $q = 1 - p$.
On reconnaît $X \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$...

(b) ... et immédiatement, E(X) existe et vaut $\dfrac{1}{q}$.