Préparation Oral HEC

24/05/2024

Exercice avec préparation (E47, 2014)

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

   Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $a > 0$ et α est un réel quelconque.

   Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ et φ, respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2. (a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$ on a $0 \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{1}{2x^2}$

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\mathrm{d}x$ converge, et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ.

   (a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

   (b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

   (c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{P}_{[\mathrm{T} > x]}\left[\mathrm{T} > x + \frac{a}{x}\right]\right)$.

Exercice sans préparation (E9, 2021)

Soient $p \in]0, 1[$ et la fonction Python suivante

```python
import numpy.random as rd
def X(p):
    k = 1
    y = 0
    a = rd.random()
    while a > p:
        y = y+1
        k = k+1
        a = rd.random()
    while a <= p:
        k = k+1
        a = rd.random()
    return k-1-y
```

En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est p :

1. Interpréter ce que simule la fonction X ?
2. Soit X la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) Quelle est l'espérance de X si elle existe ?