ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Préparation Oral HEC

27/05/2024

Sujet Maths Appliquées 7, 2023

Exercice avec préparation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$$

On note $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. Comme conditions suffisantes, on peut proposer :
   - f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$;
   - (x_0, y_0) est un point critique de f ;
   - Les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont toutes strictement positives.
2. f est polynômiale, donc **continue**, sur l'ensemble **fermé borné** C. D'après le cours elle est bornée sur C et atteint ses bornes ; d'où l'existence d'un maximum et d'un minimum.
3. On calcule les dérivées partielles premières et secondes :

$$\partial_1 f(x, y) = 2x(1 - y) \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - x^2$$

$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = 2(1 - y) \quad ; \quad \partial^2_{2,1} f(x, y) = -2x = \partial^2_{1,2} f(x, y) \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f(x, y) = 2$$

   On détermine les points critiques dans C en résolvant $\partial_1 = \partial_2 = 0$:

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - x^2/2) = 0 \\ y = x^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0, \pm\sqrt{2}\} \\ y = x^2/2 \end{cases}$$

   Si on se restreint à C la seule possibilité est $x = 0$, et par suite $y = 0$: $(0, 0)$ est le seul point critique de f dans C.
   En ce point : $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale ; on a immédiatement son spectre qui vaut $\{2\}$. D'après le cours, f admet un minimum local en $(0, 0)$.
4. **Le maximum** n'est pas atteint en un point intérieur au carré C : si c'était le cas on serait en un point critique et on a vu que le seul point critique est un min.
   Il est donc atteint sur la frontière.
   Cette frontière est constituée de 4 segments :
   - $y = 1$, $x \in [-1, 1]$: on étudie alors $x \mapsto f(x, 1) = 1$, constante égale à 1.
   - $y = -1$, $x \in [-1, 1]$: on étudie alors la fonction $x \mapsto f(x, -1) = 1 + 2x^2$ sur $[-1, 1]$. Cette fonction admet est minimale en $x = 0$ (et vaut 1) et maximale en $x = \pm 1$ (et vaut 3)
   - $x = 1$, $y \in [-1, 1]$: on étudie alors la fonction $x \mapsto f(1, y) = y^2 - y + 1$ sur $[-1, 1]$.
     Une rapide étude de fonction donne le tableau

y	-1		$1/2$		1
$f(1, y)$	3	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

Sur ce côté, le maximum est 3 (atteint en $y=-1$) et le minimum est $\frac{3}{4}$ (atteint en $y=\frac{1}{2}$).

- $x=-1$, $y \in [-1,1]$: même étude.

Au final, la valeur maximale de f sur la frontière de C est 3 (atteinte aux points $(-1,-1)$ et $(1,-1)$; et on a justifié que c'est la valeur maximale de f sur C.

Sur l'intérieur du carré, le seul **minimum** est atteint en $(0,0)$; f est nulle en ce point.
On a vu par ailleurs par ailleurs que f est toujours strictement positive sur la frontière de C : 0 est le minimum global de f sur C, atteint en $(0,0)$·

5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ, notée L_λ, de la fonction f.

   (a) On résout $f(x,y)=\lambda$ d'inconnue $y \in [-1,1]$:

$$y^2 - x^2y + x^2 = \lambda \Leftrightarrow y^2 - \left(x^2\right)y + (x^2 - \lambda)$$

   équation du second degré dont on calcule le discriminant :

$$\Delta = x^4 - 4(x^2-\lambda) = x^4 - 4x^2 + 4\lambda$$

   Ici on ne se limite plus à $x \in [-1,1]$; il faut examiner le signe de Δ sous la condition $\lambda > 1$.
   Soit $\Delta : x \mapsto x^4 - 4x^2 + 4\lambda$; on a $\Delta'(x) = 4x(x^2-2)$; d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\Delta'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\Delta(x)$		$\searrow$	$4\lambda-4$	$\nearrow$	4λ	$\searrow$	$4\lambda-4$	$\nearrow$	

   On voit que si $\lambda > 1$ on a $\Delta(x) > 0$ pour tout réel x.
   On déduit alors les deux solutions de $y^2 - x^2y + x^2 = \lambda$:

$$y_1 = \frac{x^2 + \sqrt{4(\lambda - x^2) + x^4}}{2} \quad ; \quad y_1 = \frac{x^2 + \sqrt{4(\lambda - x^2) + x^4}}{2}$$

   Les fonctions recherchées sont :

$$\varphi_1 : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{4(\lambda - x^2) + x^4}}{2} \quad ; \quad \varphi_2 : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{4(\lambda - x^2) + x^4}}{2}$$

   (b) Assez pesant mais bon...
   On fait les imports utiles, et on définit les fonctions φ_i :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def phi1(x,la):
    return (x**2+np.sqrt(4*(la-x**2)+x**4))/2

def phi2(x,la):
    return (x**2-np.sqrt(4*(la-x**2)+x**4))/2
```

   On se donne des listes correspondant aux domaines de variation des divers paramètres :

```
X = np.linspace(-4,4,100)
La = [1.01 , 1.2 , 2.2 , 3.2 , 4.2]
```

   On trace les courbes :

```
for la in La:
    plt.plot(X,[phi1(x,la) for x in X])
    plt.plot(X,[phi2(x,la) for x in X])

plt.show()
```