

Préparation Oral HEC

27/05/2024

Sujet Maths Appliquées 7, 2023

Exercice avec préparation

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$$

On note $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$, une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 .

1. Cours : Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g .
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C .
3. Étudier la nature du point critique de f qui se trouve dans C .
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur C .
5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ , notée L_λ , de la fonction f .

(a) Déterminer deux fonctions φ_1 et φ_2 définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que:

$$L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_1(x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_2(x)\}$$

(b) Écrire un code Python qui réalise le tracé des lignes de niveau L_λ pour $-4 \leq x \leq 4$ et $\lambda \in \{1, 01; 1, 2; 2, 2; 3, 2; 4, 2\}$.