Corrigé DS Rentrée

Exercice 1

1. $4\times 2^{n+1} - 3\times 2^{n+2} = 2^{n+1}(4-3\times 2)$

$= 2^{n+1}(-2)$

$= \boxed{-2^{n+2}}$

2. $$\frac{\frac{4^n}{3^{2n}}}{\frac{3\times 2^{2n}}{9^{n+1}}} = \frac{4^n}{3^{2n}} \times \frac{9^{n+1}}{3\times 2^{2n}}$$

$$= \frac{(2^2)^n \times (3^2)^{n+1}}{3^{2n+1} \times 2^{2n}} = \frac{\cancel{2^{2n}} \times 3^{2n+2}}{3^{2n+1}\times \cancel{2^{2n}}} = \boxed{3}$$

3. $$\ln\left(\ln(e^{x+1})\right) - \ln\left(x^2-1\right) + \ln(x+1)$$

$$= \ln(x+1) - \ln\left((x-1)(x+1)\right) + \ln(x+1)$$

$$= \ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right) + \ln(x+1)$$

$$= \ln\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\right) \boxed{= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

4. $$\frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x+1-(x+2)+x}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \boxed{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}$$

Exercice 2

Avec un pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 2 \\ -3y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ z = -3y - 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y + 3y + 2 \\ z = -3y - 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ z = -3y - 2 \end{cases} , \ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}}$$

Exercice 3

1. $u=(1,1,3)$ et $v=(1,0,2)$ sont deux vecteurs non colinéaires, donc $\boxed{\text{forment une famille libre}}$

2. On cherche si tt élément de F s'écrit comme combinaison linéaire de u et v.

Soit $(x,y,z)\in F$: on a donc $2x+y-z=0$.

On cherche α et β tq $(x,y,z)=\alpha(1,1,3)+\beta(1,0,2)$

autrement dit : $\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha=y\\ 3\alpha+2\beta=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=y\\ \beta=x-\alpha=x-y\\ 3\alpha+2\beta=3y+2x-2y\\ \quad =2x+y=z\end{cases}$

car $(x,y,z)\in F$.

Ainsi $(x,y,z)=y(1,1,3)+(x-y)(1,0,2)\in \mathrm{Vect}(u,v)$

$\Rightarrow \boxed{(u,v) \text{ est génératrice de } F}$

(u,v) est génératrice de F, et libre, donc est une base de F

et $\mathrm{Card}(u,v)=\boxed{2=\dim(F)}$

3. Si $(x,y,z)=(-1,3,1)$ on a $2x+y-z = -2+3-1 = 0$

donc $\boxed{(-1,3,1)\in F}$

et avec les calculs précédents :

Ex $\boxed{(-1,3,1) = \underbrace{3}_{y}(1,1,3) + \underbrace{(-4)}_{x-y}(1,0,2)}$

Exercice 4

1. Algo classique :

```
def maxi(L):
    maxi = L[0]
    for k in range(1, len(L)):
        if L[k] > maxi :
            maxi = L[k]
    return maxi
```

2. Cette fonction parcourt la liste et garde en mémoire ds la variable maxi la +gde valeur observée jusqu'à présent.
Si L[k] est égale au maximum déjà observé le max ne bouge pas. et l'indice k est ajouté à 1 liste d'indices
Si L[k] est un nouveau max, la liste des indices est vidée et on y rajoute l'élt k.

En sortie, la liste "indices" contient les positions où apparaît la valeur maximale de L. ③

Par exemple $L = [1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3]$ a pour valeur maximale 3

(indice 0) indice 3, indice 5, indice 8

$$\boxed{\text{position\_maxi}(L) \text{ renverra donc } [3,5,8]}$$

Exercice 5 $\quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

1. $Z_1 = \frac{1}{1^3} = 1$; $Z_2 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_{n+1} - Z_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(Z_n) \text{ est strict}^t \text{ croissante}}$$

3. $\forall k \geqslant 2$ on a $0 < k^3 - k \leqslant k^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^3 - k} \geqslant \frac{1}{k^3}$$ par croissance de la fct inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

3. On somme ensuite cette inégalité mais attent, elle ne vaut que pour $k \geq 2$!!

Il faut donc "isoler le premier terme"

$$\forall n \geq 2, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \underbrace{1}_{\substack{\text{terme} \\ k=1}} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{\leq \frac{1}{k^3-k}} \leq \underline{1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}}$$

4. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k+1)(k-1) + ck(k-1)}{(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{ak^2 + ak + bk^2 - b + ck^2 - ck}{k(k^2-1)}$$

$$= \frac{k^2(a+b+c) + k(a-c) - b}{k^3-k}$$

Cette dernière express° vaut $\frac{1}{k^3-k}$ si on a, par identificat° :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 & [\text{terme en } k^2] \\ a \quad -c = 0 & [\;\text{"} \quad \text{"} \; k] \\ -b = 1 & [\;\text{"} \; \text{constant}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = c \\ 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1 \\ c = 1/2 \end{cases}}$$

5. On somme la forme obtenue en 4°)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{k+1} \right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right)$$ avec des télescopages

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}}}$$ après mise au même dénominateur.

6. On remarque alors : $\forall n \geq 2,\ Z_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$

$$\leq 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\forall n \geq 2,\ Z_n \leq \frac{5}{4} = M$$ ← indépendant de n

d'où : (Z_n) est majorée ; et croissante d'après 2.

$$\Rightarrow \boxed{(Z_n) \text{ converge}}$$

7. On initialise une variable S à 0 et on lui ajoute tous les termes qui composent la somme.

```
def Z(n):
    S = 0
    for k in range(2, n+1):    # pour sommer de 2 à n
        S = S + 1/(k**3 - k)
    return S
```

Exercice 6

1. $\frac{\ln(x)}{x}$ est bien défini dès que $\begin{cases} x > 0 & (\text{pour le } \ln) \\ x \neq 0 & (\text{— dénominateur}) \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$

2. Sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression ~~est~~ de $f(x)$ est bien définie ; f y est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables

3. $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

On étudie donc le signe de $f'(x)$:

- $\forall x > 0, \ x^2 > 0$
- $1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e$ (stricte $\nearrow$ du ln).

Ainsi on a le tableau : $\simeq 2{,}7 \quad 3 \quad 3{,}14$

x	0		e		3	π	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$			
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$			

4. Un peu subtil !

Explorons : à quoi équivaut (par exemple) $3^\pi \geq \pi^3$?

$$3^\pi \geq \pi^3 \iff \ln(3^\pi) \geq \ln(\pi^3) \quad \text{(str. } \nearrow \text{ du ln)}$$

$$\iff \pi \ln(3) \geq 3 \ln(\pi)$$

$$\iff \frac{\ln(3)}{3} \geq \frac{\ln(\pi)}{\pi} \quad \text{en divisant par 3 et } \pi > 0$$

$$\iff f(3) \geq f(\pi)$$

Or $3 \leq \pi \simeq 3{,}14$ et d'après le tableau de variat° cette dernière inégalité est <u>vraie</u> : on a donc $\boxed{3^\pi \geq \pi^3}$

(NB : on a eu du bol ; mais si on était partis de $3^\pi \leq \pi^3$ on serait tombé sur une propriété fausse et on en aurait déduit que le contraire est vrai.

NB : on a $3^{\pi} \simeq 31,54$ et $\pi^3 \simeq 31,01$.