

Devoir surveillé de rentrée  
03/09/2024  
Durée : 2h

### Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes ( $x$  et  $y$  sont réels  $> 0$  tels que les quantités qui suivent soient bien définies,  $n \in \mathbb{N}$ ) :

1.  $4 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2}$

2.  $\frac{4^n}{\frac{3 \times 2^{2n}}{9^{n+1}}}$

3.  $\ln(\ln(e^{x+1})) - \ln(x^2 - 1) + \ln(x + 1)$

4.  $\frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}$

### Exercice 2

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

### Exercice 3 (algèbre linéaire)

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$ . On pose  $u = (1, 1, 3)$  et  $v = (1, 0, 2)$ .

1. Montrer que  $(u, v)$  est une famille libre.
2. Montrer que  $(u, v)$  est une famille génératrice de  $F$ . En déduire que  $(u, v)$  est une base de  $F$ . Que vaut  $\dim(F)$  ?
3. Est-ce que le vecteur  $(-1, 3, 1)$  appartient à  $F$  ? Si oui, décomposer ce vecteur dans la base  $(u, v)$ .

### Exercice 4 (Informatique)

1. Écrire une fonction `plus_grand_element` qui prend en argument une liste  $L$  de nombres et renvoie le plus grand élément de  $L$ .
2. Expliquer ce que fait la fonction suivante :

```
1 def position_maxi(L):
2     maxi=L[0]
3     indices=[0]
4     for k in range(1, len(L)):
5         if L[k]==maxi:
6             indices.append(k)
7         elif L[k]>maxi:
8             indices=[k]
9             maxi=L[k]
10    return indices
```

Que renvoie `position_maxi([1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3])` ?

## Exercice 5

On considère la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , définie pour tout  $n \geq 1$  par  $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ .

1. Calculer  $Z_1$  et  $Z_2$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Montrer que pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3 - k}$ . En déduire que pour tout  $n \geq 2$ ,  $Z_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$ .
4. Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tels que pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^3 - k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$ .
5. Montrer :  $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$ .
6. À l'aide des questions précédentes, déterminer un majorant  $M$  de la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
La suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle convergente ou divergente ?
7. Écrire le code d'une fonction Python, nommée  $Z$ , prenant en argument un entier naturel  $n$  et renvoyant la valeur de  $Z_n$ .

## Exercice 6

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . On le notera  $\mathcal{D}_f$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$ .  
*On ne demande pas le calcul des limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ .*
4. Comparer les nombres  $3^\pi$  et  $\pi^3$ .