TD1

Relations de comparaison sur les suites

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
3. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^5$
4. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $(u_n)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^n$
5. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $1 + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + v_n$
6. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
7. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\ln(v_n)\big)$.

Exercice 2. Pour les suites (u_n) et (v_n) suivantes, dire si on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$? $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$? $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$? Rien de tout cela ?

1. $u_n = n+1$ et $v_n = n+2$
2. $u_n = \sqrt{n} + n\ln n$ et $v_n = n$
3. $u_n = e^n$ et $v_n = e^{2n}$
4. $u_n = n^4 + 3n^2 - 1$ et $v_n = n^4 + 5$
5. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$
6. $u_n = \ln\left(n^3\right)$ et $v_n = \ln(n)^3$
7. $u_n = \dfrac{e^n + 3n}{n^2+1}$ et $v_n = e^n$
8. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = \dfrac{n+1}{3n^2+1}$
9. $u_n = n^5$ et $v_n = 2^n$
10. $u_n = 3$ et $v_n = e^{-n}$
11. $u_n = \dfrac{2}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$

Exercice 3. **(*)** Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

1. $\left(n^4 + 3 + 3^n\right)\left(e^{-2n} + 1\right)$
2. $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1$
3. $\ln\left(1 + e^{-n^2}\right)$.
4. $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
5. $\dbinom{n}{k}$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé).
6. $\left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)^3 - 1$
7. $\ln\left(n^2 + n + 1\right)$
8. $\dfrac{e^{1/2n} - 1}{e^{1/2n} + 1}$
9. $e^{n+1-\frac{1}{n}}$
10. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3/5} (1+n)^{5/3}$

Exercice 4. (*)
Calculer les limites pour $n \to +\infty$ des suites suivantes en utilisant des relations de comparaison :

1. $\dfrac{n^3 + e^n - \ln(n)}{n^4 - n^2 + \sqrt{n}}$
2. $(n^2 - n)\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)$
3. $(2n-2)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$
4. $\dfrac{e^{-n}}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}$
5. $\dfrac{\ln(n^3 - 2)}{\sqrt{3n^2+1}}$
6. $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)}{2^{-n+1}}$
7. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $\left(1 + e^{-n}\right)^{n^2}$
9. $\dbinom{n}{k} x^n$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $x \in [0,1[$) (on écrira x^n sous forme d'une exponentielle)

Exercice 5. Déterminer un équivalent de (u_n) sous les hypothèses suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 2$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \leqslant u_n \leqslant n+3$
4. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n-1 \leqslant u_n^2 \leqslant n + 3\sqrt{n}$ (avec $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$)
5. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - e^n \leqslant n$

Exercice 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces deux suites pour que $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Donner un exemple où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{v_n})$.
2. On suppose que :
   - (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs ;
   - $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   - (u_n) et (v_n) tendent vers une limite ℓ, où $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$.

   Montrer que si $\ell \neq 1$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 7. Soit $k > 0$. On cherche à montrer que $k^n = o(n!)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{k^n}{n!}$.

1. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Conclure.

Exercice 8. La série harmonique.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$; en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln k$.
2. En déduire que $\mathrm{H}_n \to +\infty$. On va maintenant montrer que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
3. Soit la suite $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant u_{n-1}$.
4. En déduire que (u_n) converge, puis que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

NB : On note traditionnellement $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathrm{H}_n - \ln(n)\big)$. On a $\gamma \simeq 0.57721566...$; γ est nommée *constante d'Euler-Mascheroni.*

Exercice 9 (Équivalent d'une somme par comparaison série-intégrale)**.**
Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} k^p$. On cherche à donner un équivalent de S_N pour $\mathrm{N} \to +\infty$.

1. Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} t^p \,\mathrm{d}t \leqslant k^p \leqslant \int_{k}^{k+1} t^p \,\mathrm{d}t.$
2. En déduire un encadrement de S_N pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer : $\mathrm{S}_\mathrm{N} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{N}^{p+1}}{p+1}$.
4. Vérifier à l'aide de formules connues votre résultat pour $p \in \{1, 2, 3\}$.

Indications

1

1. Chercher un contre-exemple avec $u_n, v_n \to +\infty$
2. Chercher un contre-exemple avec $u_n, v_n \to 0$
3.
4. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = ?$
5. Penser à des suites telles que $1+u_n$ et $1+v_n$ tendent vers 0.
6.
7. Non car le ln « écrase les différences » . Contre-exemple ?

2 Si nécessaire, commencer par chercher des équivalents simples de u_n et de v_n ; comparer ensuite ces équivalents.

3

1.
2.
3.
4. Mettre au même dénominateur.
5. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$
6.
7. $\ln\left(n^2+n+1\right) \sim 2\ln(n)$ mais le montrer correctement !! (sans passer les équivalents au logarithme)
8. Le dénominateur tend vers 2
9. Les équivalents ne passent pas à l'exponentielle...
10. ... par contre ils passent à une puissance (fixe).

4

1.
2. Écrire la racine carrée comme une puissance
3. Écrire le contenu du ln comme $1+x_n$ où $x_n \to 0$.
4.
5.
6.
7. Puissance non fixe : on met sous forme exponentielle.
8. idem
9.

5 Pour les encadrements : diviser par ce qu'il faut pour obtenir, par encadrement, une quantité qui tend vers 1. Conclure par définition de la relation $\sim$.

6

1. $$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1 \Leftrightarrow \dots$$
2. On écrit
$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n)+\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$
On connaît la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$; on discute alors la limite de $\ln(v_n)$.
Si $v_n \to 1$ on ne peut pas conclure avec le calcul précédent : chercher un contre-exemple avec des suites de la forme $1+\alpha_n, \alpha_n \to 0$.

7

1. Définition de la limite !
2. Utiliser la question précédente ; qui permet de « passer de u_n à u_{n+1} » .
3.

8

1. Étude ultra-classique de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)-x$ sur $]-1,+\infty[$.
$\ln(k+1)-\ln(k) = \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$

2. Sommer cette dernière inégalité sur k
   Par minoration on aura ensuite la limite voulue.
3. Montrer que $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et utiliser l'inégalité de la question 1 (est-ce légitime ?)
4. Pour obtenir l'équivalent, on revient à la définition : étude du quotient.

9

1. Croissance de l'intégrale : encadrer simplement t^p pour $t \in [k, k+1]$ (resp. $t \in [k-1, k]$).
2. Sommer !
3. Calculer les intégrales de l'encadrement précédent.
4.