Méthode
Étude de suites implicites.

1 Présentation

On appelle *suite implicite* une suite (u_n) où le nombre u_n est défini comme l'unique solution d'une certaine équation (qui fait donc apparaître le paramètre $n \in \mathbb{N}$). Si l'équation en question est assez compliquée, on n'a donc pas de formule $u_n = f(n)$ à disposition. Pour étudier existence, monotonie, convergence, et autres propriétés de cette suite, on a donc recours à un ensemble de techniques usuelles d'étude d'une fonction. La marche à suivre est essentiellement toujours la même.

Au cours de ce polycopié nous traiterons les questions de l'exercice suivant, tiré d'EM Lyon 2003 (donc ne vous efforcez pas de le résoudre avant de tourner la page !) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution, qu'on note u_n.
2. Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.
3. Compléter le code suivant, qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de u_n à ε près.

```
import numpy as np

def f(n,x):
    return np.exp(-x)-x**(2*n-1)

def suite(n,epsilon):
    a = ....
    b = ....
    while .... :
        c = (a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c)<0:
            .....
        else :
            .....
    return ...
```

4. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
5. Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ \ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
6. On pose alors $u_n = 1 + h_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$. Montrer que $\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

---

2 Bonne définition de la suite

On a d'entrée de jeu une question d'existence : comme on ne sait pas résoudre l'équation proposée, il faut montrer l'existence de la solution sans pour autant donner cette solution. C'est une application du *théorème de la bijection* :

Théorème 1 (Théorème de la bijection)**.** *Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$: autrement dit, pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = y$.*

Remarque 1. Par continuité et monotonie de f, $f(\mathrm{I})$ est l'intervalle délimité par les valeurs de f aux « extrémités » de I (qui peuvent éventuellement être des limites).

L'ingrédient nécessaire à tout cela est donc d'avoir le tableau de variation de la fonction f_n, où figurent aussi les limites.

Sur notre exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \geqslant 0,\ f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution, qu'on note u_n.

3 Localisation des termes de la suite

Elle se fait en observant le tableau de variation de f_n, et en utilisant la monotonie de f_n. Par exemple, si f est strictement croissante, on aura $u_n \geqslant a$ ssi $f_n(u_n) \geqslant f_n(a)$. *Il suffit donc de calculer $f_n(a)$ pour connaître la position relative des nombres u_n et a.*

Sur notre exemple :

Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.

4 Monotonie

On cherche donc à comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes u_{n+1} et u_n.
Comme précédemment, dans ces exercices on compare deux nombres en comparant leurs images par f_n. On a $f_n(u_n) = 0$ (donc aussi : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$).
On retombe sur les arguments de la partie précédente en comparant $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$; ou $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$.

NB : le calcul des quantités $f_n(u_{n+1})$ et $f_{n+1}(u_n)$ peut ne pas conduire à une expression « simple » ; par contre l'équation vérifiée par u_n, et la localisation obtenue précédemment, nous permettront de déterminer le signe de cette quantité.

Sur notre exemple :

Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

5 Convergence, équivalents, propriétés diverses

Pour la suite de l'exercice, plus de méthode standard : on cherche à se servir de la relation $f_n(u_n) = 0$ et on voit où cela nous mène...

Sur notre exemple :

- Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On pose alors $u_n = 1 + h_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$. Montrer que $\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

D'autres exemples

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx - e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution, qu'on note u_n.
2. Montrer que $u_n \geqslant 0$, puis que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire un encadrement de u_n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Justifier que $u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$; en déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x^3 + nx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution réelle, que l'on notera u_n.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire le sens de variation de (u_n).
4. À l'aide de l'équation vérifiée par u_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$. En déduire un équivalent de u_n.
5. On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ nv_n = -u_n^3$; en déduire un équivalent de v_n.