

# Séries numériques

## 1 Rappels

On récapitule ici sans démonstrations les concepts et résultats introduits en première année dans l'étude des séries numériques.

### 1.1 Définitions

**Définition 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. On appelle **série de terme général**  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Les  $S_n$  sont appelées **sommes partielles** de la série. On note souvent «  $\sum u_n$  » la série de terme général  $u_n$ .

**Remarque 1.** Il peut arriver que  $u_0$  ne soit pas défini (par exemple dans le cas  $u_n = \frac{1}{n^2}$ ) : dans ce cas les sommes partielles seront définies comme  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

On note parfois la série sous la forme  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  pour signaler ces particularités.

On se pose alors la question de la convergence de  $(S_n)$ .

**Définition 2.** On dit que  $\sum u_n$  (la série de terme général  $u_n$ ) **converge** ssi la suite des sommes partielles converge vers un nombre réel  $\ell$ . Dans le cas contraire, on dit que  $\sum u_n$  **diverge**.

La série  $\sum u_n$  converge donc si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$  existe et est un nombre réel.

Dans le cas de la convergence, on introduit le vocabulaire suivant :

**Définition 3.** Soit  $\sum u_n$  une série convergente, et  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles.

- On appelle **somme de la série**  $\sum u_n$  la limite de  $(S_n)$ . On utilise alors la notation :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

- On appelle **reste partiel** de  $\sum u_n$ , la quantité :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Comme  $S_n \rightarrow S$ , on a immédiatement, dans le cas d'une série convergente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ .

**Remarque 2.** De la même manière que pour les suites :

- Une combinaison linéaire de séries convergentes est convergente ;
- La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente ;
- On ne peut rien dire sur la nature d'une combinaison linéaire de séries divergentes.

On a rapidement une condition **nécessaire** de convergence :

**Proposition 1.** Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

et on note tout aussi rapidement que :

Il est **capital** de se souvenir que cette condition **n'est pas suffisante** : il existe des suites  $(u_n)$  tendant vers 0, telles que la série  $\sum u_n$  diverge.

C'est le cas de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  (vu en exo dans le chapitre précédent).

Ce résultat a quand même une conséquence utile :

**Corollaire 2.** Par contraposée de la proposition 1 : si  $(u_n)$  ne tend pas vers 0,  $\sum u_n$  diverge : on dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Nous verrons que beaucoup des critères d'étude développés dans le chapitre mettent en jeu des **séries à termes positifs** (SATP). Heureusement, leur étude peut déboucher sur des résultats pour des séries quelconques. On introduit pour cela la notion de **convergence absolue** :

**Définition 4** (Convergence absolue). On dit que la série  $\sum u_n$  converge absolument ssi la série  $\sum |u_n|$  converge.

Le résultat suivant (qui sera démontré plus tard dans le cours) permet alors de déduire des informations sur  $\sum u_n$  :

**Théorème 3.** Si  $\sum u_n$  converge absolument, alors elle converge. On a de plus :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

*Démonstration.* En annexe. □

Pour démontrer la convergence d'une série, on pourra donc commencer par essayer de démontrer sa convergence absolue ; on pourra alors faire appel aux résultats qui suivront, qui concernent les SATP.

**Remarque 3.** La réciproque de ce théorème est fautive : il existe des séries convergentes, non absolument convergentes. On les appelle parfois *séries semi-convergentes*. Par exemple,  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge (on est dans le cadre du *critère des séries alternées* – voir exercice) ; mais  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge (voir : *séries de Riemann*).

## 1.2 Premières séries de référence

Vous avez étudié en première année quelques cas particuliers :

**Proposition 4** (Nature de séries particulières).

- **Série de terme général constant.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $a \neq 0$ , la série  $\sum a$  diverge grossièrement ; si  $a = 0$  la série nulle converge évidemment vers 0.
- **Série arithmétique.** Si  $(u_n)$  est arithmétique, la série  $\sum u_n$  est toujours divergente, sauf si c'est la série nulle.
- **Série géométrique.** Soit  $q \in \mathbb{R}$ .  $\sum q^n$  converge ssi  $|q| < 1$  (s'écrit aussi  $q \in ]-1, 1[$ ) ; on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- **Série géométrique dérivée.**  $\sum nq^{n-1}$  converge ssi  $|q| < 1$  ; on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

(le terme  $n = 0$  étant nul, on peut faire démarrer indifféremment la somme à  $n = 0$  ou  $n = 1$ ).

- **Série géométrique dérivée seconde.**  $\sum n(n-1)q^{n-2}$  converge ssi  $|q| < 1$  ; on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

(même remarque sur le démarrage à  $n = 0$ ,  $n = 1$ , ou  $n = 2$ ).

- **Série exponentielle.**  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge pour tout réel  $x$  ; on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

**Exemple 1.** La série de terme général  $e^{-2n}$  converge (géométrique, de raison  $e^{-2} \in ]-1, 1[$ ) (attention donc,  $\sum e^{-2n}$  est une série géométrique, et non une série exponentielle !!)

## 1.3 Séries télescopiques

Dans le cas d'une étude de suite, on étudie parfois une série télescopique (de manière surprenante, l'étude d'une série est parfois plus facile que celle d'une suite) :

**Définition 5.** On appelle **série télescopique** toute série de la forme  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ , où  $(u_n)$  est une suite réelle.

**Le résultat suivant est à la limite du programme : dans l'étude d'une série télescopique, il est souhaitable de reproduire le calcul qui suit, au lieu de l'utiliser sans démonstration.**

**Proposition 5.** La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge ssi la suite  $(u_n)$  converge.

*Démonstration.* On étudie la suite des sommes partielles.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On a, par somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^N (u_{k+1} - u_k) = u_{N+1} - u_0$$

et il est alors clair que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^N (u_{k+1} - u_k) \right)$  existe ssi  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N$  existe. □

**Exemple 2.** Montrer que la série de terme général  $\frac{1}{k(k+1)}$  converge, et calculer sa somme.

## 2 Séries à termes positifs (SATP)

L'intérêt de l'étude des séries à termes positifs est motivé par le théorème 3 : si  $\sum u_n$  est une série quelconque,  $\sum |u_n|$  est une SATP ; et si  $\sum |u_n|$  converge, alors  $\sum u_n$  converge également.

### 2.1 Un premier critère

On considère une série  $\sum u_n$  à termes positifs. Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ , on voit que la suite  $(S_n)$  est croissante. Une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée ; on en déduit un premier résultat de convergence :

**Proposition 6.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.  $\sum u_n$  converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

**Remarque 4.**

- Ce résultat n'est pas d'utilisation très fréquente<sup>1</sup> ; on ne cherchera pas à l'appliquer en priorité.
- Ce critère est faux pour les séries à termes quelconques : la série  $\sum (-1)^n$  a ses sommes partielles majorées ; elle diverge pourtant grossièrement.

Ce critère va nous servir à établir la nature de séries de référence.

### 2.2 Exemple fondamental : les séries de Riemann

Les séries de Riemann constituent un exemple important de comportement de séries numériques : elles font partie des « séries de référence » qui seront essentielles dans l'utilisation de relations de comparaison.

**Définition 6.** On appelle séries de Riemann les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 7.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

*Démonstration.* Voir annexe. □

À ce stade, on dispose donc d'une panoplie de séries de référence dont on connaît la nature : séries de Riemann, séries géométriques, séries exponentielles.

L'étape suivante consiste à développer des outils mettant en jeu les relations de comparaison : si  $\sum u_n$  est une série quelconque, on cherche à déterminer sa nature en la comparant à une des séries de référence.

---

<sup>1</sup> cela arrive quand même, mais cela fera l'objet d'un guidage : si l'énoncé cherche vous demande de majorer les sommes partielles d'une série, il y a fort à parier qu'il faudra utiliser ce résultat.

## 2.3 Théorèmes de comparaison

**On prendra garde que les théorèmes suivants sont valables pour des séries à termes positifs (SATP).**

**Théorème 8.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP, telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ .

- Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge, et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

*Démonstration.*

- Les sommes partielles de  $\sum u_n$  sont majorées par  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- Si  $\sum u_n$  diverge, ses sommes partielles ne sont pas majorées, et donc celles de  $\sum v_n$  ne le sont pas non plus.

□

**Remarque 5** (Rédaction). Même si ça vous paraît évident, forcez-vous à faire apparaître le «  $0 \leq$  » dans la propriété «  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$  » qui vous permet d'invoquer le théorème ci-dessus.

Le correcteur attend que la positivité des termes généraux soit mentionnée ; et de votre côté ce sera une occasion de vérifier si les séries que vous manipulez sont effectivement à termes positifs.

**Remarque 6.** La convergence ou divergence d'une série numérique ne dépend pas de ses premiers termes (c'est une propriété *asymptotique*). On en déduit que la proposition précédente s'applique encore sous l'hypothèse :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$  (ie la propriété de comparaison est vraie à partir d'un certain rang – on notera cela *APCR*).

Attention, par contre, l'inégalité sur les deux sommes n'est plus forcément vraie sous ces hypothèses !

### Exemple 3.

Nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + e^{-n}} \qquad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

On peut également procéder à partir des comparaisons asymptotiques  $o$  et  $\sim$ . On démontre que :

**Théorème 9.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP.

- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ , et si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Remarque 7.** Attention, **ces résultats s'appliquent à des SATP**. On peut toutefois étendre les résultats par un peu de gymnastique :

- On sait que deux suites équivalentes sont de même signe APCR. Si  $\sum v_n$  est une SATP, et si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , on peut affirmer que  $u_n \geq 0$  APCR, et donc on peut appliquer le théorème à ces deux SATP.

- Dans le cas de séries à terme général négatif (au moins APCR), on pourra s'intéresser à la nature de la série (à termes positifs, cette fois)  $\sum(-u_n)$ .

Dans le cas de l'utilisation d'une relation d'équivalence on a directement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow (-u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-v_n)$$

Dans le cas de l'utilisation d'une relation  $o$ , on pourra remarquer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow (-u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$$

- Si le terme général  $u_n$  n'est pas de signe constant (même APCR), on considère sa valeur absolue  $|u_n|$ , et on essaie de conclure à la convergence absolue. Si celle-ci n'a pas lieu, le problème est plus compliqué que prévu : l'énoncé vous guidera.

**Remarque 8.** Le résultat sur la nature de deux séries de terme général équivalent est faux dans le cas de séries à termes quelconques. Par exemple :  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge (voir exercices), mais  $\sum \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$  diverge (somme d'une convergente et d'une divergente).

**Exemple 4.** Donner la nature (convergence / divergence) des séries suivantes :

$$\sum \frac{3n^3 - 5}{2n^4 + 2n + 1} \qquad \sum \frac{4n - 1}{n^2 e^n}$$

## 2.4 « Test de Riemann »

Pour des termes généraux qui ne se comparent pas facilement aux séries de référence, ce test est un outil permettant de donner la nature de la série. Elle consiste en fait à « forcer » une comparaison à une série de Riemann, dans un contexte où ça n'est *a priori* pas naturel.

**Théorème 10.** Soit  $\sum u_n$  une SATP. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument.

*Démonstration.* L'hypothèse du théorème peut se réécrire  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est une série de Riemann convergente ; ceci permet de conclure par comparaison de SATP. □

**Remarque 9.** En pratique, ce critère est invoqué pour des séries dont le terme général est négligeable devant toute série de Riemann (on peut les imaginer dans une zone entre les séries de Riemann convergentes et les séries exponentielles convergentes). On l'utilisera donc, sauf instructions contraires, avec  $\alpha = 2$  (pour fixer les choses).

**Remarque 10.** Lors de la première utilisation de ce résultat sur une copie de concours, il est nécessaire de refaire la preuve : ce résultat n'est pas explicitement au programme (mais néanmoins d'usage TRÈS fréquent).

**Exemple 5.** Donner la nature de  $\sum n^2 e^{-n}$ .

### 3 Démonstrations

#### Théorème 3

Si  $\sum u_n$  converge absolument, alors elle converge. On a de plus :  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

Ainsi :

- si  $u_n \geq 0$ , alors  $u_n^+ = u_n$  et  $u_n^- = 0$ ;
- si  $u_n \leq 0$ , alors  $u_n^+ = 0$  et  $u_n^- = -u_n$ ;
- Dans tous les cas, on a :  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$  et  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ .
- $u_n^+$  (resp.  $u_n^-$ ) est appelée *partie positive* (resp. *partie négative*) de  $u_n$ . Ce sont tous deux des réels positifs.

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^+ \leq |u_n|$ , donc  $\sum u_n^+$  converge; de même  $\sum u_n^-$  converge. On en déduit que  $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$  converge.

L'inégalité triangulaire sur les sommes s'obtient en prenant la limite en  $N \rightarrow +\infty$  de l'inégalité triangulaire sur les sommes partielles de  $u_n$  et  $|u_n|$ . □

#### Théorème 7

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Remarque 11.** Avant de se lancer dans des démonstrations techniques, on remarque que si  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha}$  ne tend pas vers 0 pour  $n \rightarrow +\infty$ ; dans ce cas la série diverge grossièrement.

*Démonstration.* C'est un cas d'utilisation de la comparaison série-intégrale.

**Cas  $\alpha \neq 1$  :** la comparaison série-intégrale donne, pour tout  $n \geq 2$  :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

soit, en rajoutant le terme  $k = 1$  (qui vaut 1) de la somme :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

et après calcul des intégrales :

$$1 + \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

- Pour  $\alpha < 1$ ,  $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = (n+1)^{1-\alpha}$  avec  $1-\alpha > 0$  : le terme de gauche de l'inégalité tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  : les sommes partielles sont minorées par une série tendant vers  $+\infty$ , donc la série diverge.

- Pour  $\alpha > 1$ , on majore le terme de droite de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

et on en déduit que les sommes partielles de  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  sont majorées : comme la série est à termes positifs, elle converge.

**Cas  $\alpha = 1$  :** On utilise cette fois, toujours par comparaison série-intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ce qui donne, après calcul de l'intégrale,  $S_n \geq \ln(n+1)$ . La suite  $(S_n)$  est minorée par une suite tendant vers  $+\infty$ , donc  $S_n \rightarrow +\infty$  : la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

□