Devoir maison n°1bis

À rendre pour le 23/09

Une suite implicite

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0,\ h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$, et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. (a) Montrer que :
$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$
   (b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.
   (c) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   (d) Montrer de même que la suite (u_n) est croissante.

4. (a) Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ, et montrer que $\ell \geqslant 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
   (c) Déterminer la limite de (v_n).

5. (a) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
   (b) Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Problème

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge également, et que, de plus, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Étude d'un exemple

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge, et donner sa somme.

2. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer u_n en fonction de n.

3. Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis vérifier que l'inégalité annoncée est bien satisfaite.

Étude d'un second exemple

On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = n!$

1. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ (on cherchera une minoration *très simple* de $1!+2!+3!+\ldots+n!$).

3. En déduire que la série de terme général u_n converge, et une majoration de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   Montrer qu'on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

Cas général

On admet ici *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

> Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des réels quelconques. On a :
>
> $$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)$$

1. Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}\right)$$

2. Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

3. En déduire, par sommation, que :

$$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{a_k}$$

   Indication : on fera apparaître une somme double qu'on intervertira : $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} u_{n,k}\right)$.

4. Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge, puis établir l'inégalité demandée.