Devoir maison n°1
À rendre pour le 23/09

Exercice 1 : Une étude de fonction et de suite

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$$

1. (a) Calculer f' et f''. Étudier les variations de f'.
   (b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution réelle α, et que $-2 < \alpha < -1$.
   On pourra utiliser les valeurs approchées $e \simeq 2,71$ *et* $e^2 \simeq 7,39$.
   (c) En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (d) Tracer un aperçu de la courbe de f. On y fera figurer les informations obtenues précédemment, ainsi que les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
   On admettra que $\alpha \simeq -1,2$.
   (e) En Python on effectue les imports suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

   Compléter le code suivant, qui affiche la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2;2]$:

```
def f(x):
    return ......

X = np.linspace(...,...,...)
plt.plot(...,...)

plt.show()
```

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $f\big([-1,0]\big) = \left[-1, \frac{1}{4}\right]$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 2 (une suite implicite)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0,\ h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Montrer que :
   $$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$
   (b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.
   (c) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   (d) Montrer de même que la suite (u_n) est croissante.

4. (a) Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ, et montrer que $\ell \geqslant 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} (v_n)^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
   (c) Déterminer la limite de (v_n).

5. (a) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de $\lim_{n\to+\infty} v_n$.