ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

TD2
Séries numériques

Exercice 1. (*) Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3}{4^n}$
3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{2}{k^{2/3}}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} e^{-2j+1}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{2n}}{(n-1)!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}\, e^{-n}$
8. $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{2i}{\left(i\sqrt{i}+1\right)\left(3-\sqrt{i}\right)}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2+\ln n}$

Exercice 2. (*) Justifier l'existence des sommes suivantes, et donner leur valeur.
Indications : pour S_5*, on cherchera* a *et* b *tels que :* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$ *; pour* S_6*,* c *et* d *tels que* $n^2=c\,n(n-1)+d\,n$ *; et pour* S_8*, on fera apparaître* $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *et* $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$.

$$\mathrm{S}_1=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} \qquad \mathrm{S}_2=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \qquad \mathrm{S}_3=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{n!} \qquad \mathrm{S}_4=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$\mathrm{S}_5=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \mathrm{S}_6=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n} \qquad \mathrm{S}_7=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{(n+1)!} \qquad \mathrm{S}_8=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{a^k}{1+b^k}$.

Exercice 4. (Suite récurrente et série)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est à termes >0. Montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.
2. On pose $v_n=\ln(u_n)$. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0-v_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5. (Étude d'une suite par la série télescopique associée)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

2. Donner la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. En procédant de manière similaire, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6. Soit $\sum a_n$ une SATP convergente.

1. Soit $x \in [0,1]$. En majorant les sommes partielles de la série de terme général $a_n x^n$, montrer que cette série converge.

2. Soit $x \in [-1,0]$. Montrer de même que la série de terme général $a_n x^n$ converge (on pourra examiner sa convergence absolue).

Exercice 7. (Développement en série entière du logarithme)
On considère un réel $x \in [0,1[$.

1. Soit $t \in [0,1]$. Donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k$.

2. En intégrant cette dernière égalité entre 0 et x, montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^n \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

3. *On rappelle que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que : $\forall\ t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (croissance de l'intégrale).*
   En encadrant $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ sur $[0,x]$, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge, et donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$.

Exercice 8.

1. (a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{1}{2n-1} \sum\limits_{j=1}^{n-1} u_j$.
   (b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.
   (c) Écrire en Python une fonction de paramètre n qui calcule le terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. (a) Établir : $\forall\ n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} u_n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   (c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   (d) En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Montrer : $\forall\ n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.
   Indication : en notant $v_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, on pourra montrer que (v_n) satisfait la relation de récurrence de la question 2a.

Exercice 9. (Critère de d'Alembert)
Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$.
   On considère r tel que $\ell < r < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \leqslant r a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant r^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ converge.
   (c) *Application :* montrer que la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^k}{k!}$ converge pour tout réel x.
2. On suppose cette fois : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   On considère r' tel que $1 < r' < \ell$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \geqslant r' a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \geqslant (r')^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ diverge.
3. On suppose enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
   En considérant des séries de Riemann, montrer qu'on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

Exercice 10. (Séries semi-convergentes)
Soit $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, calculer les quantités $\mathrm{S_{2N+2}} - \mathrm{S_{2N}}$, $\mathrm{S_{2N+3}} - \mathrm{S_{2N+1}}$, $\mathrm{S_{2N+1}} - \mathrm{S_{2N}}$. En déduire que les suites $(\mathrm{S_{2N}})$ et $(\mathrm{S_{2N+1}})$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
3. Montrer que, pour $n \to +\infty$, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Donner la nature de ces deux séries. Conclusion?

NB : la série étudiée est un cas particulier de *série alternée.* On montre en fait (hors-programme) :

Soit (a_n) une suite positive, décroissante, tendant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Exercice 11. (Étude du reste d'une série convergente / des sommes d'une série divergente)
On s'intéresse à la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$. On va montrer sa divergence, puis donner un équivalent de ses sommes partielles (qui tendent donc vers $+\infty$).

1. Soit $n \geqslant 3$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.
2. En déduire un encadrement de $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)}$; puis un équivalent de S_n.

On s'intéresse maintenant à la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

3. Justifier que cette série converge.
4. Soit $n \geqslant 2$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$.

5. En déduire un encadrement du reste partiel $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, puis un équivalent de R_n (on pourra commencer par encadrer $\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, avec $\mathrm{N} \geqslant n+1$).

Exercice 12. Soit $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{H}_n = +\infty\cdot$

Indications

1
1. Trouver un équivalent
2. Série de référence
3. Trouver un équivalent
4. Série de référence
5. Mettre au même dénominateur
6. Passer par les sommes partielles car il faut effectuer un changement d'indice
7. Test de Riemann
8. Trouver un équivalent
9. Test de Riemann
10. Comparer à une série de Riemann
11. Prendre un équivalent, puis test de Riemann... assez fin !

2
1. Série géométrique
2. Série géométrique mais attention aux premiers termes !
3. Série exponentielle
4. Série géométrique dérivée
5. Téléscopage : il faut passer par les sommes partielles.
6. $n^2 = n(n-1)+n$
7. On reconnaît une série exponentielle après changement d'indice ; donc passer par les sommes partielles.
8. $1-\frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$. Puis on découpe le ln, et on téléscope !

3 Chercher un équivalent du dénominateur : il faudra discuter suivant la valeur de b.

4
1.
2. Montrer que $v_n - v_{n+1} = u_n$.
3. Revenir à la définition... s'intéresser à la limite des sommes partielles.

5
1. Il faut trouver $\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.
2.
3. Par téléscopage, on relie la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ à la suite $\left(\ln(u_n)\right)$.
   Si une série à termes négatifs diverge, quelle est la limite de ses sommes partielles ?
4. On pose donc $v_n = nu_n$; et on commence par trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. Essayer d'utiliser les calculs précédents !!
   Cette fois, on trouvera $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

6
1. Commencer par majorer les sommes partielles de $\sum_{k=0}^{n} a_k$ par une quantité indépendante de n.
2. De même on va montrer que les sommes partielles de la série de terme général $|a_n x^n| = a_n|x|^n$ sont majorées.

7
1. Somme usuelle ; et c'est une somme *finie* !!!
2. Avant d'intégrer sur $[0,x]$, s'assurer que l'égalité est bien valable sur $[0,x]$, et le faire figurer dans la rédaction.
3. $1+t \geqslant 1$ suffit à obtenir ce qu'on veut.
4. Revenir à la définition de la convergence d'une série... tout l'exercice a consisté à étudier les sommes partielles.

8
1. (a) Ici une récurrence $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$ ne suffira pas... quel type de récurrence utiliser ?
   (b)
   (c) Ici encore : pour calculer u_n il faut avoir conservé en mémoire les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Réfléchir à la bonne structure de données.
2. (a) Isoler le terme u_n dans $\sum_{j=1}^{n} u_j$.
   (b)
   (c)
   (d)
   (e) Regarder la limite des sommes partielles de $\sum \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
3.

9

1. (a) $r > \ell$ donc il existe n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$.
   (b) Récurrence puis comparaison à une série convergente
   (c) $a_k = \dfrac{x^k}{k!}$ donc un calcul simple donne $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$; on devrait se trouver dans le cas de figure de cette question...
2. (a) Comme en 1a avec $r' < \ell$.
   (b) Récurrence puis comparaison à une série divergente.
3.

10

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N+2} a_n - \sum_{n=0}^{2N} a_n = a_{2N+1} + a_{2N+2}$. Se souvenir que $(-1)^k$ vaut 1 si k est pair et -1 si k est impair.
2. Si (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers la même limite, que dire de (S_N) ?
3.

11

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante, donc sur un intervalle donnée on peut encadrer par les valeurs aux bornes. Faire ça sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$ puis intégrer.

   Pour la primitive on pourra remarquer que $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, avec $u(t)$ à déterminer.
2. Pour déduire l'équivalent : chercher un équivalent des deux quantités qui encadrent. Mais il faut ensuite effectuer une démo propre.
3.
4. Comme en 2.
5.

12

1. Écrire $H_{2n} - H_n$ comme une somme, et minorer le terme général de cette somme.
2. Commencer par la monotonie de (H_n). Puis : que dire si $H_n \to \ell$?