ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Programme de colle n°2
Semaine du 23/09

Suites et séries

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés des feuilles de TD1 et TD2 sont exigibles

Suites

- Rappels de première année.
- Méthodes (voir les fiches traitées en cours) :
  - Étude d'une suite récurrente (obéissant à une relation $u_{n+1} = f(u_n)$).
  - Étude d'une suite implicite (u_n est défini comme solution d'une équation).

  Ces études devront être guidées par l'énoncé.
- Relations de comparaison o et $\sim$.
  - Définitions (en pratique : $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$).
  - Échelle de comparaison usuelle (par utilisation des croissances comparées).
  - Diverses propriétés et règles de calcul (voir le polycopié de cours). Notamment : équivalent d'un produit, d'un quotient, d'une puissance. On ne somme pas les équivalents. $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ n'implique pas $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(y_n)$ en général ; notamment dans le cas de ln et exp.
    Équivalent d'un polynôme en n.
  - Équivalents usuels pour u_n vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$:
  $$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \quad (\alpha \neq 0)$$
  - Application : calcul de limites.
  - **Pas encore de développements limités.**

Séries

- Définitions : série de terme général u_n. Sommes partielles. Série convergente, série divergente. Divergence grossière. Convergence absolue ; elle implique la convergence.
  En cas de convergence, définition des restes partiels.
- Sommes usuelles :
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ (avec $|q|<1$)
  - série téléscopique : (u_n) et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature (doit être redémontré *via* les sommes partielles) ; somme en cas de convergence.
- Théorèmes de comparaison :
  Tous ces théorèmes s'appliquent à des SATP. Pour des séries à termes négatifs on passera par la nature de $\sum(-u_n)$; on pourra aussi examiner la convergence absolue (la semi-convergence n'est quasiment pas au programme et doit faire l'objet d'indications).

- Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$: $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv, et : $\sum u_n$ dv $\Rightarrow \sum v_n$ dv. Extension lorsque les comparaisons sont vraies à partir d'un certain rang.
- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ SATP telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$: si $\sum v_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des SATP, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
  Deux séries de terme général équivalent étant de même signe à partir d'un certain rang, on note qu'il est suffisant que $\sum v_n$ soit une SATP (on a donc un critère d'« équivalence à une SATP »).

• Séries de référence : Riemann (démo du critère HP), géométriques, exponentielle.

• « Test de Riemann » : si $n^\alpha u_n \to 0$, avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge (la convergence doit être redémontrée par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$).

• Pas au programme : d'Alembert, tout résultat sur la semi-convergence (en particulier le critère des séries alternées).

Python : algorithmes exigibles

• Calcul du n-ième terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Lorsqu'une telle suite tend vers $+\infty$: détermination du plus petit rang N tel que $u_{\mathrm{N}} > 10000$.

• Algorithme de dichotomie.