ECG2B — Année scolaire 2024-2025
Lycée Marcelin Berthelot — Mathématiques

Devoir maison n°1 - 1bis
Corrigé

Exercice 1 : Une étude de fonction et de suite

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$$

1. (a) **Calculer f' et f''. Étudier les variations de f'.**
Les formules de dérivation usuelles donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} = 1 + \frac{1}{4}xe^{-x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{1}{4}(e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{1}{4}(1-x)e^{-x}$$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, le signe de $f''(x)$ est celui de $(1-x)$; on obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) **Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution réelle α, et que $-2 < \alpha < -1$.**
***On pourra utiliser les valeurs approchées* $e \simeq 2,71$ *et* $e^2 \simeq 7,39$.**
On a besoin de donner les limites de f', ainsi que la valeur en -1.
On obtient :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ avec $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$ (pas de forme indéterminée)
- $f'(1) = 1 + \dfrac{1}{4e} > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, avec $xe^{-x} \to 0$ pour $x \to +\infty$ (croissance comparée usuelle).

D'où le tableau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{4e}$	$\searrow$	1

On voit alors que f' est continue, et strictement croissante sur $]-\infty, 1[$; donc réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]-\infty, 1+\frac{1}{4e}[$.
Comme $1 + \frac{1}{4e} > 0$, on a $0 \in]-\infty, 1+\frac{1}{4e}[$, et donc il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
On voit aussi sur le tableau que f' ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$; donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Pour le localiser plus précisément, calculons :

- $f'(-2) = 1 - \dfrac{1}{2}e^2 < 0$ avec la valeur approchée donnée ;
- $f'(-1) = 1 - \dfrac{e}{4} > 0$

Comme $f'(-2) < 0$ et $f'(-1) > 0$, on peut conclure par théorème des valeurs intermédiaires que $-2 < \alpha < -1$.

(c) **En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.**

On «met à jour» le tableau de variations précédent avec ces nouvelles informations :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\frac{1}{4e}$	$\searrow$	1
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

(d) **Tracer un aperçu de la courbe de f. On y fera figurer les informations obtenues précédemment, ainsi que les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.**
***On admettra que* $\alpha \simeq -1,2$.**

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^x - \frac{1}{4}(x+1)\right)$. Or pour $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$, et $xe^x \to 0$ (croissances comparées, l'exponentielle tend vers 0 et l'emporte) ; donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Pour $x \to +\infty$, les mêmes croissances comparées donnent $(x+1)e^{-x} \to 0$; et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Pour le tracé :

- f atteint son minimum en $\alpha \simeq -1,2$;
- $f(0) = -\frac{1}{4}$ (point d'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnées)

et on obtient l'aperçu suivant :

(e) **En Python on effectue les imports suivants :**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Compléter le code suivant, qui affiche la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2;2]$:

```
def f(x):
    return x-(1/4)*(x+1)*np.exp(-x) # mettre une syntaxe correcte !!
                                    # (* pour la multiplication, etc.)

X = np.linspace(-2,2,100) # assez de points équirépartis entre -2 et 2
plt.plot(X,f(X)) # et comme on manipule des array, f agit terme à terme
                 # sur la liste des abscisses

plt.show()
```

2. **Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.**

(a) **Montrer que $f\big([-1,0]\big) = \left[-1, \frac{1}{4}\right]$.**

Erreur d'énoncé : il faut en fait lire $f\big([-1,0]\big) = \left[-1, -\frac{1}{4}\right]$.

On reprend le tableau de variation de f : on a $f(-1) = -1$ et $f(0) = -\frac{1}{4}$; f est continue et **croissante** sur $[-1,0]$ (**ne pas oublier cet argument de monotonie !!!**) ; d'où on déduit bien que

$$f\big([-1,0]\big) = \left[-1, \frac{1}{4}\right]$$

(b) **Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.**

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : pour $n = 1$, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = -\frac{1}{4}$; donc on a bien $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; on suppose que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$. Autrement dit : $u_n \in [-1,0]$; et donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f\big([-1,0]\big) = \left[-1, \frac{1}{4}\right]$.

  Donc $-1 \leqslant u_n \leqslant -\frac{1}{4} \leqslant 0$: on a bien l'hérédité.
- Finalement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.

Pour la décroissance, calculons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \frac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n} = -\frac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n}$$

Comme $u_n \geqslant -1$ pour tout n (pour tout $n > 0$ d'après ce qui précède, et $u_0 = 0$), on a $1 + u_n \geqslant 0$, et donc $-\frac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n} \leqslant 0$: on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

et la suite (u_n) est bien décroissante.

(c) **Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.**

(u_n) est décroissante, et minorée par -1 d'après ce qui précède ; elle est donc convergente.
Comme $u_n \to \ell$, on a aussi $u_{n+1} \to \ell$, et en faisant $n \to +\infty$ dans la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n}$$

on obtient

$$\ell = \ell - \frac{1}{4}(\ell+1)e^{-\ell}$$

ce qui donne $\frac{1}{4}(\ell+1)e^{-\ell} = 0$. Comme $e^{-\ell}$ est toujours non nul, on a donc $\ell + 1 = 0$; et donc (u_n) converge vers $\ell = -1$.

Exercice 2 (une suite implicite)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.**

   On passe par sa dérivée. h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de telles fonctions (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).
   En écrivant $h_n(x) = x^n + 1 + x^{-n}$ il vient :

   $$\forall x > 0,\ h_n'(x) = nx^{n-1} + (-n)x^{-n-1} = n\frac{x^{2n}-1}{x^{n+1}}$$

   n et x^{n+1} sont strictement positifs donc le signe de h_n' est celui de $x^{2n}-1$.
   On a donc : $\forall x \in]0,1[,\ h_n'(x) < 0$; et $\forall x \in]1,+\infty[,\ h_n'(x) > 0$.
   La fonction h_n est donc strictement décroissante sur $]0,1[$, et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. **En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.**

   On peut dresser un tableau de variations de h_n (les limites sont évidentes) :

x	0		1		$+\infty$
$h_n(x)$	||	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$	

   En appliquant le théorème de la bijection sur $]0,1[$:
   h_n est continue, strictement décroissante sur $]0,1[$, donc réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]3,+\infty[$. $4 \in]3,+\infty[$, donc il existe un unique réel de $]0,1[$, qu'on note u_n, tel que $h_n(u_n) = 4$.
   De même sur $]1,+\infty[$:
   h_n est continue, strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]3,+\infty[$. $4 \in]3,+\infty[$, donc il existe un unique réel de $]1,+\infty[$, qu'on note v_n, tel que $h_n(v_n) = 4$.
   Comme $h_n(1) = 3 \neq 4$ on n'a bien que deux solutions à l'équation $h_n(x) = 4$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus $u_n \in]0,1[$ et $v_n > 1$ d'après la construction ci-dessus : on a bien $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. (a) **Montrer que :**

   $$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

   On travaille sur l'expression de gauche :

   $$\begin{aligned}\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right)\\ &= \frac{x^{2n+2} + x^{n+1} + 1 - (x^{2n+1} + x^{n+1} + x)}{x^{n+1}}\\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

   et en observant par ailleurs :

   $$\frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} = \frac{x^{2n+2} - x - x^{2n+1} + 1}{x^{n+1}}$$

   on a bien l'égalité demandée.

(b) **En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.**

On pose $x = v_n$ (qui est bien > 0) dans l'égalité de 3a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n - 1)({v_n}^{2n+1} - 1)}{{v_n}^{n+1}}$$

Comme $v_n > 1$, on a $v_n - 1 > 1$ et ${v_n}^{2n+1} - 1 > 1$, et l'expression précédente montre que $h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0$; de plus, par définition, $h_n(v_n) = 4$. On a donc obtenu $h_{n+1}(v_n) - 4 > 0$, ce qui implique $h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

(c) **Montrer que la suite (v_n) est décroissante.**
Méthode connue : on utilise la monotonie de h_n... ici, en fait de h_{n+1}.
On écrit $4 = h_{n+1}(v_{n+1})$ (toujours par définition de v_{n+1}) ; donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant h_{n+1}(v_{n+1})$$

Par stricte croissance de h_{n+1} sur $]1, +\infty[$ on en déduit $v_n \geqslant v_{n+1}$: la suite (v_n) est décroissante.

(d) **Montrer de même que la suite (u_n) est croissante.**
On pose cette fois $x = u_n$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(u_n) - h_n(u_n) = \frac{(u_n - 1)({u_n}^{2n+1} - 1)}{{u_n}^{n+1}}$$

Avec $0 < u_n < 1$ on voit que cette dernière quantité est positive ; ceci montre de même que $h_{n+1}(u_n) \geqslant 4$; puis que $h_{n+1}(u_n) \geqslant h_{n+1}(u_{n+1})$.
Or h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ (intervalle auquel appartiennent u_n et u_{n+1}) ; ce qui donne

$$h_{n+1}(u_n) \geqslant h_{n+1}(u_{n+1}) \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+1}$$

et la suite (u_n) est donc croissante.

4. (a) **Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ, et montrer que $\ell \geqslant 1$.**
(v_n) est décroissante et minorée par 1, donc converge vers une limite réelle $\ell \geqslant 1$ par théorème de limite monotone.

(b) **En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^n = +\infty$. En déduire une contradiction.**
Par décroissance de (v_n) on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \ell > 1$, donc ${v_n}^n \geqslant \ell^n$. Or si $\ell > 1$, $\ell^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par minoration ${v_n}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Or on sait, par définition de v_n, que $h_n(v_n) = 4$ ce qui s'écrit encore ${v_n}^n + 1 + \dfrac{1}{{v_n}^n} = 4$. Si ${v_n}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ${v_n}^n + 1 + \dfrac{1}{{v_n}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par opérations usuelles sur les limites : c'est absurde car cette quantité vaut 4.

(c) **Déterminer la limite de (v_n).**
On a $\ell \geqslant 1$ et on vient de voir que $\ell > 1$ amène une contradiction : donc $\ell = 1$.

5. (a) **Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.**
Par définition de v_n, on a ${v_n}^n + 1 + \dfrac{1}{{v_n}^n} = 4$. Posons alors $\mathrm{X} = {v_n}^n$: on a $\mathrm{X} + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}} = 4$, ce qui s'écrit encore $\dfrac{\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1}{\mathrm{X}} = 0$.
On résout donc $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1 = 0$: $\Delta = 5$ et donc $\mathrm{X} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Avec $4 < 5 < 9$ on a $2 < \sqrt{5} < 3$ et donc $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2}$: cette solution ne peut pas être ${v_n}^n$ car $v_n > 1$.
On en déduit donc ${v_n}^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

(b) **Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de $\lim_{n\to+\infty} v_n$.**

On a $v_n = ({v_n}^n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Problème (DM 1bis)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.
Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge également, et que, de plus, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Étude d'un exemple

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

1. **Vérifier que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge, et donner sa somme.**
   $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{a_n}$.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$: on a par téléscopage :
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$
   et donc pour $N \to +\infty$, cette somme tend vers 1 : $\sum \frac{1}{a_n}$ converge, et
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

2. **Pour tout entier naturel n non nul, déterminer u_n en fonction de n.**
   $a_n = n(n+1) = n^2 + n$ donc par les formules usuelles :
   $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
   et $u_n = \frac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

3. **Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis vérifier que l'inégalité annoncée est bien satisfaite.**
   On voit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2} \geqslant 0$, donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente (on compare bien des SATP).
   On remarque aussi que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)} = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
   de sorte que, si $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient par téléscopage
   $$\sum_{n=1}^{N} u_n = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right)$$
   et pour $N \to +\infty$: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.
   Or on a vu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$: on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Étude d'un second exemple

On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = n!$

1. **Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.**

   La série de terme général $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n!}$ est la série exponentielle, qui est convergente.

   On a aussi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1$.

2. **Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ (on cherchera une minoration *très simple* de $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$).**

   Il suffit d'écrire :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_1 + \cdots + a_n = 1! + \cdots + n! \geqslant n!$$

   et on a ensuite $u_n \leqslant \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$.

3. **En déduire que la série de terme général u_n converge, et une majoration de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.**

   Montrer qu'on a bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

   La série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ est également une série exponentielle (décalée d'un indice) donc converge ; et toujours par comparaison de SATP, $\sum u_n$ converge. De plus la majoration précédente (valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) donne en sommant :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

   (en posant $k = n - 1$)

   On a donc :

   - $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2(e-1) \simeq 2(2.71 - 1) = 3.42$
   - $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant e \simeq 2.71$

   donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Cas général

On admet ici *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

> Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des réels quelconques. On a :
>
> $$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)$$

1. **Montrer :**

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (1 + 2 + \cdots + n)^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

   On cherche donc à appliquer Cauchy-Schwarz ; en examinant la formule on aimerait bien poser $\alpha_k^2 = a_k$ et $\beta_k^2 = \dfrac{k^2}{a_k}$. Allons-y donc : on applique Cauchy-Schwarz avec

   $$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_k = \sqrt{a_k} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{k}{\sqrt{a_k}}$$

(les a_k étant >0 par hypothèse, ceci ne pose pas problème).
On a alors
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right)$$
ce qui s'écrit ici :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$
ce qui est bien ce qu'il fallait démontrer.

2. **Utiliser le résultat précédent pour établir que :**
$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$
Indication : **on fera apparaître une somme double qu'on intervertira :** $\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{n,k}\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}u_{n,k}\right)$**.**

On connaît l'expression de la somme de gauche : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. La formule précédente donne :
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$
puis on divise par $\sum_{k=1}^{n}a_k$ (strictement positive), puis par $n^2(n+1)^2>0$:
$$\frac{1}{4\sum_{k=1}^{n}a_k}\leqslant\frac{1}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$
et en multipliant par $4(2n+1)>0$:
$$\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}\leqslant 4\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$
On remarque enfin que : $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ce qui permet de conclure.

3. **En déduire, par sommation, que :**
$$\forall\,\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{a_k}$$

Sommons la relation précédente pour n allant de 1 à N (OK car elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$) et effectuons la permutation suggérée. Il faut ensuite prendre garde aux facteurs qui peuvent « sortir de la somme » .
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}}4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) && \textstyle\sum_n \text{ téléscopique}\\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(\mathrm{N}+1)^2}\right)\\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

4. **Montrer enfin que la série de terme général** $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ **converge, puis établir l'inégalité demandée.**

$\sum \dfrac{1}{a_k}$ est une SATP convergente donc on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

La série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est donc une SATP dont les sommes partielles sont majorées (par une quantité indépendante de N) ; donc elle converge, et on obtient en sommant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

De plus, pour tout n, $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \geqslant \dfrac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$, de sorte que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2u_n \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

et on obtient l'inégalité voulue en divisant par 2.