Variables aléatoires discrètes

Exercices

Rappels de première année

Exercice 1. (Tirages successifs)
Une urne n°1 contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Une urne n°2 contient 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire au hasard une boule de l'urne n°1, et on la place dans l'urne n°2. Puis on tire au hasard une boule dans l'urne n°2. On note

- B_i l'événement : «On tire une boule blanche dans l'urne n°i».
- R_i l'événement : «On tire une boule rouge dans l'urne n°i».

Déterminer :

1. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche.
2. La probabilité que la boule transférée soit blanche, sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

Exercice 2. (Marche au hasard sur une droite)
On considère un objet qui se déplace aléatoirement sur un axe. Au temps 0, il part de l'origine; à chaque unité de temps il saute d'une longueur 1 vers la gauche ou vers la droite, de manière équiprobable. On note X_i le déplacement de l'objet à l'étape i : si le i-ème saut est vers la droite, on a $X_i = 1$; s'il est vers la gauche, on a $X_i = -1$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i; puis $\mathbb{E}(X_i)$.
2. Montrer que $Y_i = \dfrac{1+X_i}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on définit $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Quelle loi suit Y ? En déduire son espérance et sa variance (on ne redémontrera pas les résultats de cours utilisés).
4. On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le déplacement total de l'objet au bout de n étapes. Montrer que $X = 2Y - n$. En déduire l'espérance et la variance de X, puis en déduire $\mathbb{E}(X^2)$.
   (NB : ceci donne l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre l'objet et l'origine à la n-ème étape).

On s'intéresse maintenant à la probabilité de retour à l'origine au bout de $n = 2k$ étapes (il est clair que l'objet ne peut pas revenir à 0 après un nombre impair de sauts...)

5. On pose donc $n = 2k$. Donner la valeur de Y correspondant à $X = 0$, en fonction de k. Donner $\mathbb{P}(Y = k)$; en déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 3. **(Lancers de pièce équilibrée)**
On dispose d'une pièce équilibrée. On effectue l'expérience suivante :

- On lance une première fois la pièce jusqu'à obtenir Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile.
- Si $X = k$, on relance k fois la pièce. On note Y le rang du premier lancer où on obtient Pile ; si les k lancers donnent tous Face, on pose $Y = 0$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ? pour Y ?
2. Donner la loi de X.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i)$; donner également $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = 0)$.
4. Déterminer la loi de Y (on séparera les cas $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 4. **(Séquences dans des tirages à Pile ou Face)**

1. On lance n fois une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note B_n l'événement : « Au cours des n premiers lancers, P n'est jamais suivi de F » . Montrer que :
   $$\mathbb{P}(B_n) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q \end{cases}$$
2. **Première séquence PP.**
   On jette indéfiniment une pièce donnant Pile avec une probabilité p et Face avec une probabilité $q = 1 - p$. On suppose $0 < p < 1$.
   On note X le premier rang d'apparition d'une séquence PP. Par exemple, si on obtient la succession FFFPFFPP, alors $X = 8$. On pose aussi $X = 0$ si PP n'apparaît jamais.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.
   (b) En discutant selon le résultat du premier lancer, montrer :
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = n + 2) = q\,\mathbb{P}(X = n + 1) + pq\,\mathbb{P}(X = n)$$
   (c) On suppose $p = \dfrac{2}{3}$. Montrer
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, $V(X)$.

Exercice 5. **(Autour de la loi de Poisson)** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire (sous forme d'une somme infinie).

Exercice 6. **(Retour de soirée)**
Une personne rentre de soirée. Elle dispose d'un trousseau de n clés, dont une seule ouvre sa porte. Elle ne se souvient plus de laquelle il s'agit et décide de toutes les essayer.

1. On suppose d'abord que, si une clé ne fonctionne pas, elle l'élimine du trousseau. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'essais effectués avant de trouver la bonne clé.

(a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

(b) Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$, puis le nombre moyen d'essais avant de trouver la bonne clé.

2. On suppose maintenant que la personne n'a pas la présence d'esprit d'éliminer une clé qui ne fonctionne pas : à chaque essai, elle choisit parmi les n clés. Reprendre les questions du 1.

Exercice 7. (Inférence bayésienne)
On dispose de 3 pièces de monnaie. Les deux premières sont équilibrées, tandis que la troisième tombe toujours sur Face. On choisit au hasard une pièce, qu'on lance 3 fois : on obtient 3 Face.

1. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce biaisée?
   On notera P_i l'événement « choisir la i-ème pièce » , et A l'événement : « obtenir 3 Face » .

2. On continue à lancer, et on obtient toujours des Face. Au bout de combien de lancers pourra-t-on affirmer avec une certitude de 99% que la pièce choisie est la pièce biaisée?

Indications

1

2

1.
2.
3. Y_i compte le nombre de X_i égaux à 1
4. E(Y) et V(Y) sont connues ; en déduire E(X) et V(X)
5.

3

1. Pour les valeurs de Y : quelles sont-elles si $X = k$? Et donc, quelles sont elles quand on prend en compte toutes les valeurs de X possibles ?
2. Loi usuelle
3. Sachant $X = k$, quelle succession de lancers fournit $Y = i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$? pour $i = 0$?
   Attention ça ressemble à une loi usuelle... mais pas tout à fait !
4. Probas totales, bien sûr.

4

1. Expliciter toutes les successions de n lancers où P n'est jamais suivi de F.
2. (a)
   (b) On note P_1 (resp. F_1) l'événement : obtenir Pile (resp. Face) au premier lancer.
   Justifier que la proba sachant F_1 de $(X = n+2)$ est égale à $\mathbb{P}(X = n+1)$.
   Pour la proba sachant P_1 c'est un peu plus compliqué... sachant qu'on s'intéresse à $(X = n+2)$ avec $n \geqslant 1$, si Pile sort au premier lancer, que doit-il se passer au second lancer ?
   (c) Sortez vos séries géométriques !

6

1. (a)
   (b) On a $X = k$ ssi les $k-1$ premières clés ne sont pas la bonne, et si la k-ème est la bonne.
   Attention, les expériences successives ne sont pas indépendantes : on élimine les clés déjà testées.
2. Pour $X(\Omega)$ songer que cette fois, au contraire du schéma précédent, on peut choisir arbitrairement longtemps une mauvaise clé.
   Mais dans ce cas, le trousseau est identique à chaque choix de clé.

7

1. Il s'agit d'une proba conditionnelle (on sait qu'on a obtenu 3 Face).
2. Remplacer 3 par n.