Programme de colle n°3

Semaine du 30/09

Séries - Révisions de probabilités ECG1

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille de TD2 sont exigibles

Séries

- Définitions : série de terme général u_n. Sommes partielles. Série convergente, série divergente. Divergence grossière. Convergence absolue ; elle implique la convergence.
  En cas de convergence, définition des restes partiels.

- Sommes usuelles :
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ (avec $|q| < 1$)
  - série téléscopique : (u_n) et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature (doit être redémontré *via* les sommes partielles) ; somme en cas de convergence.

- Théorèmes de comparaison :
  Tous ces théorèmes s'appliquent à des SATP. Pour des séries à termes négatifs on passera par la nature de $\sum(-u_n)$; on pourra aussi examiner la convergence absolue (la semi-convergence n'est quasiment pas au programme et doit faire l'objet d'indications).

  - Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$: $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv, et : $\sum u_n$ dv $\Rightarrow \sum v_n$ dv. Extension lorsque les comparaisons sont vraies à partir d'un certain rang.
  - Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ SATP telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$: si $\sum v_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv.
  - Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des SATP, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
    Deux séries de terme général équivalent étant de même signe à partir d'un certain rang, on note qu'il est suffisant que $\sum v_n$ soit une SATP (on a donc un critère d'« équivalence à une SATP »).

- Séries de référence : Riemann (démo du critère HP), géométriques, exponentielle.

- « Test de Riemann » : si $n^\alpha u_n \to 0$, avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge (la convergence doit être redémontrée par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$).

- Pas au programme : d'Alembert, tout résultat sur la semi-convergence (en particulier le critère des séries alternées).

Python : algorithmes exigibles

- Calcul du n-ième terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Lorsqu'une telle suite tend vers $+\infty$: détermination du plus petit rang N tel que $u_{\mathrm{N}} > 10000$.

- Algorithme de dichotomie.

Probabilités discrètes : révisions de première année

- Probabilités : définitions, propriétés. Probabilités conditionnelles. Probabilités composées. Systèmes complets d'événements et probabilités totales (cas fini et cas infini dénombrable). Formule de Bayes.
- Variables aléatoires discrètes. Définition d'une loi de probabilité. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson. Utilisation de ces lois dans la modélisation d'expériences aléatoires. Espérances et variances pour chacune de ces lois.
- Espérance d'une variable aléatoire discrète. Elle existe en cas de convergence *absolue* de la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$.

  $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$.
- Variance d'une variable aléatoire. Formule de Koenig-Huygens.