ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé n°1

28/09/2024

Durée : 3h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, qu'il existe exactement deux réels strictement positifs u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, et qu'on a $u_n < n < v_n$.
   (c) Montrer que $f_n(n^2) = nf_2(n)$; en déduire que $v_n < n^2$.
2. Compléter l'algorithme suivant, qui renvoie une valeur approchée de v_n à une précision ε (passée en argument) près.

```
import numpy as np
def f(n,x):
    return ...

def v(n,epsilon):
    a = ...
    b = ...
    while ... :
        c = (a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c)<0:
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. On exécute les commandes suivantes :

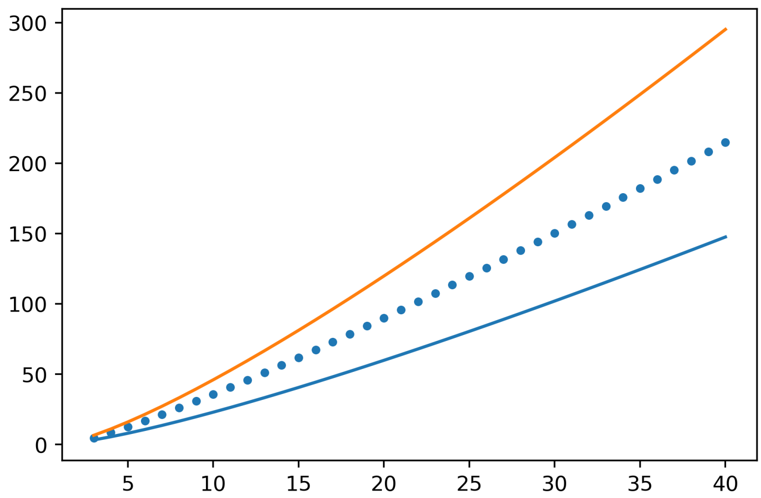
```
import matplotlib.pyplot as plt

N = np.arange(3,41)
V = [v(n) for n in N]
plt.scatter(N,V)

plt.plot(N,N*np.log(N))
plt.plot(N,2*N*np.log(N))

plt.show()
```

et on obtient la représentation graphique :



Expliciter ce que contiennent les listes N et V. Que représentent les points ? et les deux courbes ? Conjecturer un encadrement de v_n à l'aide de cette figure.

5. Étude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$

   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3,\ n\ln(n) < v_n$.

   (c) Soit g la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Étudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.

   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 2

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1],\quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

5. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{t^n}{1-t}$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

6. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
   En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

7. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

8. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

9. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 3

On admet dans cet exercice le théorème de Cesàro :

> Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :
> $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \ell$$

On considère la suite (x_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + e^{-x_n} \end{cases}$$

1. **Préliminaire.**
   (a) Montrer que (x_n) est à valeurs strictement positives, et est croissante.
   (b) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

2. **Étude d'une suite auxiliaire et détermination d'un équivalent.**
   On pose : $y_n = e^{x_n}$.
   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n e^{1/y_n}$.
   (b) À l'aide d'un équivalent usuel, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (y_{n+1} - y_n)$.
   (c) En appliquant le théorème de Cesàro, en déduire que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   (d) Déterminer alors un équivalent de x_n pour $n \to +\infty$.

3. **Digression sur la somme harmonique.**
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer : $\forall k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire un encadrement de $\mathrm{H}_n - 1$, puis montrer : $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. **Terme suivant du développement de y_n.**
   (a) On admet que, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $e^{u_n} - 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{u_n}^2}{2}$. Montrer que $y_{n+1} - y_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

(b) On admet (promis, c'est le dernier !) un résultat de sommation des relations de comparaison :

> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs **divergentes**, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
> Alors leurs sommes partielles sont équivalentes en $+\infty$:
> $$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Montrer $y_{n+1} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$.

En fait ceci revient à $y_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$, *après quelques manips fastidieuses.*

On peut donc noter : $y_n = n + w_n$, où $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$.

5. **Terme suivant du développement de x_n.**
Montrer que $x_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n}$.