Exercice 1

CORRIGÉ DS1

Ex1 ①

1a. $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fct° dérivabls.

$\forall x>0,\ f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$

d'où le tableau:

x	0		n		$+\infty$
$x-n$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

On a

- $f_n(n) = n(1-\ln(n))$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$
$= \lim\limits_{x\to0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{- n\ln(x)}_{\to -\infty} = \underline{\underline{+\infty}}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \overset{\to+\infty}{x}\Big(1 - \underbrace{n\dfrac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\Big) = \underline{\underline{+\infty}}$ (c.c.)

1b. Si $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(e) = 1$

d'où $n(1-\ln(n)) < 0$.

Alors: * f_n est continue, strict^t décroissante sur $]0,n[$; donc réalise une biject° de $]0,n[$ sur $]n(1-\ln(n)), +\infty[$.

$0 \in]\underbrace{n(1-\ln(n))}_{<0}, +\infty[$; donc $\exists!\ x \in]0,n[$ tq $f_n(x) = 0$

Ce x est noté u_n.

Ex 1 ②

De même, f_n réalise une bijection de $]n, +\infty[$ vers $]n(1-\ln(n)), +\infty[$

$\Rightarrow \exists! \, v_n > n$ tq $f_n(v_n) = 0$.

Comme $f_n(n) \neq 0$, u_n et v_n sont bien les deux seules solut° de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; et on a bien $\boxed{u_n < n < v_n}$

1c. $f_n(n^2) = n^2 - n\ln(n^2)$

$= n^2 - 2n\ln(n)$

$= n(n - 2\ln(n))$

$f_n(n^2) = n f_2(n)$

Or le tableau de variat° de 1a montre que :

$\forall x > 0, \quad f_2(x) \geq 2(1-\ln(2)) > 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(n^2) > 0$

$f_n(n^2) > f_n(v_n)$.

Par stricte $\nearrow$ de f_n sur $[n, +\infty[$ (intervalle qui contient v_n et n^2)

on en déduit : $\boxed{\forall n \geq 3, \ v_n < n^2}$

2. C'est bien entendu une dichotomie.

Ex1 ③

```
def f(n, x):
    return x - n * np.log(x)

def v(n, epsilon):
    a = n
    b = n**2          # initial^t on sait que n < v_n < n^2
    while b-a > epsilon:
        c = (a+b)/2
        if f(n,a) * f(n,c) < 0 :   # il y a 1 solut° ds [a, c]
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

3°) $\forall n \geq 3$: $f_n(1) = 1$

$f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ (car $n \geq 3$)

Ainsi $f_n(e) < 0 < f_n(1)$

$\iff f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$

et comme f_n est str. ↓ sur $]0, n[$ (1, u_n et e sont él^ts de cet intervalle) :

$$\boxed{e > u_n > 1}$$

Ex 1
(4)

3b. $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$

On $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \iff u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$

$\iff \underline{u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})}$

d'où $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1})$

$$\Rightarrow \boxed{f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})}$$

Comme $u_{n+1} > 1$ (3a.), on a $f_n(u_{n+1}) > 0$

$\iff f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$

$\iff u_{n+1} < u_n$ par str. $\downarrow$ de f_n sur $[1, e]$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

3c. $(u_n) \downarrow$, minorée par 1 (3a.) donc <u>converge</u> vers $l \geq 1$.

On a par définit° de u_n :

$u_n = n\ln(u_n)$

$\Rightarrow \ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$.

Avec $1 < u_n < e$, $\dfrac{1}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{e}{n}$

et par thm des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Ex 1

5

3d $u_n \to 1$ donc $u_n - 1 \to 0$

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = \frac{\ln(1+\overbrace{(u_n-1)}^{\to 0})}{u_n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n-1}{u_n-1} = 1$$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = 1}$

d'où $u_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$

de plus $u_n \to 1$ donc $u_n \sim 1$ donc $\frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$

et on conclut bien $\boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

4. la liste N est le np.array $[3, 4, 5, \dots, 40]$

et la liste V ——— $[v(3), v(4), \dots, v(40)]$ où

$v(i)$ est la valeur approchée de v_i renvoyée par la dichotomie.

$\Rightarrow$ les points sur le graphe sont les éléments de la liste (v_n)

pour $n \in [\![3, 40]\!]$.

les deux plt.plot tracent les courbes représentatives de

$x \mapsto x\ln(x)$

et $x \mapsto 2x\ln(x)$

sur $[\![3, 40]\!]$.

On conjecture alors : $\boxed{\forall n \geq 3, \quad n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)}$

courbe du bas — points — courbe du haut.

5a.

Ex1 ⑥

$\forall n \geq 3, \quad v_n \geq n$. $n \to +\infty$ donc par minorat :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$$

5b. $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n))$

$= \cancel{n\ln(n)} - n(\cancel{\ln(n)} + \ln(\ln(n)))$

$= \underline{\underline{-n\ln(\ln(n))}}$

Pour $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$ puis $\ln(\ln(n)) > 0$

d'où $f_n(n\ln(n)) < 0 = f_n(v_n)$

Par str. $\nearrow$ de f_n sur $[n, +\infty[$: $\boxed{v_n > n\ln(n)}$

5c. On remarque $g = f_2$!! d'où : $\underline{\forall x > 0, \quad g(x) > 0}$ (cf 1a et 1c)

En particulier $g(n) > 0$: $\boxed{\forall n \geq 1, \quad n > 2\ln(n)}$

5d. $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n))$

$= 2n\ln(n) - n(\ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n)))$

$= n\ln(n) - n\ln(2) - n\ln(\ln(n))$

$= n\ln\Big(\underbrace{\frac{n}{2\ln(n)}}_{> 1 \text{ d'après 5c}}\Big)$ en regroupant.

$\Rightarrow \forall n \geq 3, \quad \underline{\underline{f_n(2n\ln(n)) > 0}}$

Ex 1 (7)

Par stricte ↗ de f_n, on déduit comme en 5b que

$$v_n < 2n\ln(n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 3, \quad n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)}$$

5e. On passe au ln (fct° strict ↗) :

$$\forall n \geq 3 \quad \ln\left(n\ln(n)\right) < \ln(v_n) < \ln\left(2n\ln(n)\right)$$

$$\Rightarrow \ln(n) + \ln\left(\ln(n)\right) < \ln(v_n) < \ln(2) + \ln(n) + \ln\left(\ln(n)\right)$$

$\div \ln(n) > 0$ $(n \geq 2)$

$$1 + \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \underbrace{\frac{\ln(2)}{\ln(n)}}_{\to 0} + \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ (c.c.)

donc les deux extrémités de l'encadrement tendent vers 1

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Exercice 2

Ex 2 ①

1a. si $x<1$ on a $1-x>0$ donc $\ln(1-x)$ est bien défini.

Par suite $x \mapsto x+(1-x)\ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty,1[$.

On établit la continuité en 1 :

* $\varphi(1)=1$ par définition.
* $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{h\to0} h\ln(h)=0$ (c.c)

d'où $\lim\limits_{x\to1^-} \varphi(x)=1=\varphi(1)$ et φ est continue en 1

$\boxed{\varphi \text{ est donc bien continue sur }]-\infty,1]}$

2a. φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ comme composée de fct° $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

$\forall x<1$, $\varphi'(x)=1+(-1)\ln(1-x)+(1-x)\left(\frac{-1}{1-x}\right)$

$\underline{\varphi'(x)=1-\ln(1-x)-1} = \underline{\underline{-\ln(1-x)}}$

2b. On résout $\varphi'(x)\geqslant0 \iff -\ln(1-x)\geqslant0$

$\iff \ln(1-x)\leqslant0$

$\iff 0<1-x\leqslant1$

$\iff 0\leqslant x<1$

d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	‖

Ex 2 ②

2c $\forall x < 1 \quad , \quad \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)-1}{x-1}$

$$= \frac{(x-1)+(1-x)\ln(1-x)}{x-1}$$

$$= 1 - \ln(1-x)$$

d'où $\underline{\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable en } 1}$

(le tx d'accroissement ayant une limite infinie)

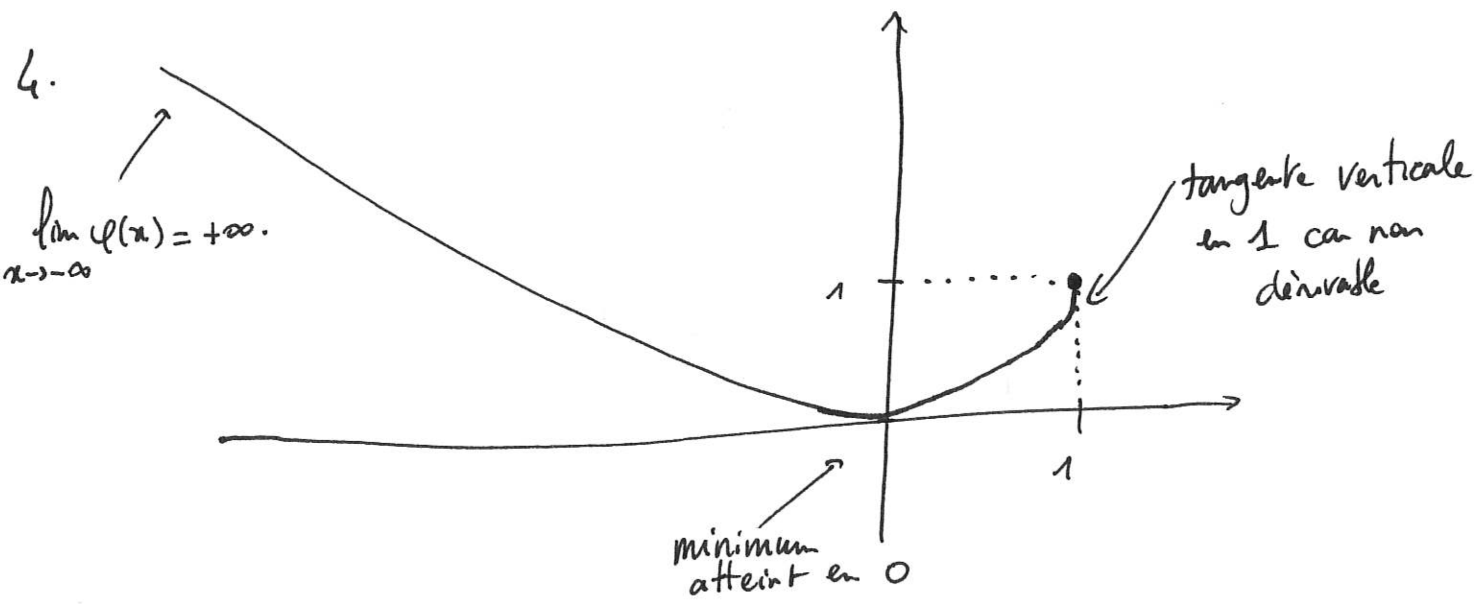
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \overbrace{x}^{\to -\infty} + \overbrace{(1-x)}^{+\infty} \overbrace{\ln(1-x)}^{+\infty}$ est une FI ; mais le terme en $x\ln(x)$ devrait l'emporter...

On factorise : $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$

$$= \underbrace{(1-x)\ln(1-x)}_{\to +\infty}\Big[\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{1}{\ln(1-x)}}_{\to 0}\Big]$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty}$

4.



5a.

Ex 2 (3)

Somme géométrique...

$x \in [0,1[$ et $t \in [0,x)$ donc $\underline{\underline{t \neq 1}}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$

et $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \underline{\underline{\frac{t^n}{1-t}}}$

5b. On intègre sur $[0,x]$ (les fct en jeu sont continues) :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

$$\Rightarrow \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt}$$

en posant $i=k+1$ ds la somme.

6. On écrit : $\forall t \in [0,x]$ $\quad 0 \geqslant 1-t \geqslant 1-x$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \quad (\text{fct inverse str.} \downarrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}}} \quad (\times t^n,\ t \geqslant 0)$$

et on intègre cela sur $[0,x]$:

$$\int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \quad - \quad \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \quad - \quad \leq \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \quad - \quad \leq \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}} \text{ avec } x^{n+1} \leq 1$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$ on a direct^t $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0}$

par théorème d'encadrement.

7. On reprend 5b (un peu secouée) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt}_{\to 0}$$

Pour $n \to +\infty$, les sommes partielles de $\sum \frac{x^k}{k}$ ont bien une limite finie : $\underline{\underline{\sum \frac{x^k}{k} \text{ cv}}}$, et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$$

8a. Dans un cas aussi simple vous êtes autorisés à balancer :

On observe : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

Ex 2 (5)

8b. On passe par les sommes partielles : ~~et on fait apparaître des télescopages~~ :

pour $N \geq 1$, $\displaystyle \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} x^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} \quad \left(\text{en changeant } n+1 = n\right)$$

On reconnaît les sommes partielles de $\sum \frac{x^n}{n}$, qui convergent : on peut passer à la $\lim\limits_{N\to+\infty}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n}$$

car $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}$, donc il faut retirer le terme $n=1$.

$$= x\left(-\ln(1-x)\right) - \left(-\ln(1-x) - x\right)$$

$$= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x$$

$$= x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$= \underline{\underline{\varphi(x)}}.$$

9. $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, Ex 2 (6)

$\sum \frac{1}{n(n+1)}$ cv.

Classiq^t :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 = \varphi(1)}$

Exercice 3

1a. Par récurrence :

* $x_0 = 1 > 0$

* si $x_n > 0$, $x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{e^{-x_n}}_{>0} > 0$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0}$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0$,

$\boxed{(x_n) \text{ est strict}^t \text{ croissante}}$

1b. Avec la monotonie, on a $x_n \to l \in \mathbb{R}$ ou $x_n \to +\infty$.

Si $x_n \to l$: par continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x + e^{-x}$,

le th du pt fixe donne $f(l) = l$

$\Leftrightarrow l + e^{-l} = l$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{e^{-l} = 0}}$: c'est impossible.

Ainsi : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$

2a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = e^{x_{n+1}} = e^{x_n + e^{-x_n}} = e^{x_n} e^{1/e^{x_n}}$

$\Rightarrow \boxed{y_{n+1} = y_n e^{1/y_n}}$

2b $\qquad$ Ex 3 ②

$$y_{n+1} - y_n = y_n e^{1/y_n} - y_n$$
$$= y_n \left(e^{1/y_n} - 1\right)$$

Or $\quad x_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y_n = e^{x_n} \to +\infty$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{1/y_n \to 0}}$$

et on peut utiliser l'équivalent usuel :

$$y_{n+1} - y_n = y_n\left(e^{1/y_n} - 1\right) \underset{n\infty}{\sim} y_n \times \frac{1}{y_n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} y_{n+1} - y_n = 1}$$

2c On applique Cesàro à $(y_{n+1} - y_n)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(y_n - y_0\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{y_n}{n} - \underbrace{\frac{y_0}{n}}_{\to 0}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{y_n}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$$

Ex 3
③

2d. Montrons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

$$x_n = \ln(y_n)$$
$$= \ln(n) + \ln\left(\frac{y_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(y_n/n)}{\ln(n)}$$

Or $\frac{y_n}{n} \to 1$ (car $y_n \sim n$)

d'où $\ln(y_n/n) \to 0$

et $\frac{\ln(y_n/n)}{\ln(n)} \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\ln(n)} = 1$ et on a bien $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

3. Méga-classique !

3a. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

et en intégrant : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}}$$

On a aussi : $\forall t \in [k-1, k]$, $1/t \geq 1/k$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{k}}$$

ce qui donne bien l'encadrement recherché.

Ex 3 ④

3b. On somme l'encadrement précédent de $k=2$ à n :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{1}{t}dt\right) \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt\right)$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \underbrace{H_n - 1}_{\text{terme } k=1} \leq \int_{1}^{n}\frac{1}{t}dt$$

(avec Chasles, et en remarquant que le terme $k=1$ est manquant pour reconstituer H_n)

$$\Rightarrow \left[\ln|t|\right]_{2}^{n+1} \leq H_n - 1 \leq \left[\ln|t|\right]_{1}^{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n)}$$

Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln(n)$: (après avoir ajouté 1 partout)

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \overbrace{\frac{-\ln(2)+1}{\ln(n)}}^{\to 0} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \overbrace{\frac{1}{\ln(n)}}^{\to 0}$$

Or $$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n\infty} 1$$

Donc, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln(n)} = 1 \Rightarrow \boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Ex3 5

4a.

$$y_{n+1} - y_n - 1 = y_n\left(e^{1/y_n} - 1\right) - 1 \quad (\text{cf } 2b)$$

$$= y_n\left(e^{1/y_n} - 1 - \frac{1}{y_n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} y_n \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_n}\right)^2 = \frac{1}{2y_n}$$

$1/y_n \to 0$

Or $y_n \sim n$ (2c.) ; ce qui donne $\boxed{y_{n+1} - y_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$

4b. On applique le résultat de sommat° des relat° de comparaison avec les deux suites de 4a.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(y_{k+1} - y_k - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(y_{k+1} - y_k\right) - \sum_{k=1}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$y_{n+1} - y_1 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{n+1} - n - y_1}{\frac{1}{2}\ln(n)} \longrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{n+1} - n}{1/2\ln(n)} - \underbrace{\frac{y_1}{1/2\ln(n)}}_{\to 0} \longrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_{n+1} - n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)}$$

5. On continue...

Ex3 (6)

$$x_n - \ln(n) = \ln(y_n) - \ln(n)$$
$$= \ln\left(\frac{y_n}{n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{n + W_n}{n}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{W_n}{n}\right)$$

Or $\frac{W_n}{n} \sim \frac{\ln(n)}{2n} \longrightarrow 0$: on peut appliquer notre formule

$$x_n - \ln(n) = \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{W_n}{n}}_{\to 0}\Big) \underset{n\infty}{\sim} \frac{W_n}{n} = \frac{\ln(n)}{2n}.$$

(et on a finalement : $x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$)