

## Variables aléatoires discrètes

### Exercices

**Exercice 1. (\*)** Dans les situations suivantes, reconnaître la loi usuelle suivie par la variable  $X$ , donner ses paramètres, son espérance et sa variance.

On prendra soin de citer les hypothèses qui permettent de justifier la loi (notamment l'indépendance) en se référant à l'énoncé.

1. Au loto, un ticket est gagnant avec probabilité  $p$ . Une personne achète un ticket par jour.  $X$  est le nombre de tickets qu'il est nécessaire d'acheter pour obtenir un ticket gagnant.
2. On considère 3 urnes  $U_1, U_2, U_3$  dans lesquelles on jette  $n$  boules. Les  $n$  boules sont indépendantes, et une boule va dans  $U_1, U_2$  ou  $U_3$  de manière équiprobable.  $X$  est le nombre de boules dans  $U_1$ .
3. 10 personnes montent dans un ascenseur qui dessert 5 étages. Chaque personne choisit un étage de manière équiprobable ; les choix des différentes personnes sont indépendants.  $X$  est le nombre de personnes choisissant le 3ème étage.
4. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise ; on note  $X$  le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule noire.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On effectue  $n$  tirages avec remise. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X$  est la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée au  $k$ -ème tirage.

**Exercice 2. (\*)**

Soit  $X, Y$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\llbracket 0, 2 \rrbracket^2$ , dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

1. Donner les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi conditionnelle de  $X$  sachant ( $Y = 1$ ).
4. Donner la loi de  $X + Y$ .
5. Donner la loi de  $\min(X, Y)$ .

**Exercice 3. (\*)**

On lance de manière répétée une pièce donnant Pile avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  ; les différents lancers sont indépendants. On note  $X$  le rang du premier Pile obtenu, et  $Y$  le rang du second Pile obtenu.

1. Donner la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$  pour tous entiers  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$  ; en déduire la loi de  $Y$ .

3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Montrer que  $E(Y)$  existe et la calculer.

**Exercice 4.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$  (avec  $p \in ]0, 1[$ ).

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\mathbb{P}(X \geq k)$ . En déduire la loi de  $\min(X, Y)$  ; reconnaître cette loi.
3. Déterminer les lois de  $\max(X, Y)$  et de  $X + Y$ .
4. Calculer  $\mathbb{P}(X = Y)$  et  $\mathbb{P}(X \geq Y)$

**Exercice 5. (\*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère  $X_1, \dots, X_n$  n variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi  $\mathcal{G}(p)$ . Déterminer les lois de  $U = \min(X_1, \dots, X_n)$  et  $V = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

**Exercice 6.** Soient X, Y, Z trois VAD mutuellement indépendantes, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , suivant la loi uniforme  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

1. Montrer :  $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}$ .
2. Montrer :  $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket, \mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{P}(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$ .

**Exercice 7.** Soit n un entier  $\geq 3$ . Une urne contient 2 boules blanches indiscernables et  $n-2$  boules noires indiscernables. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne. On note X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le rang du tirage de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$ .
2. Soit  $k \in X(\Omega)$  ; déterminer  $\text{Card}(X = k)$ . En déduire la loi de X.
3. De même, déterminer la loi de Y.
4. Déterminer  $\text{Card}((X = k) \cap (Y = \ell))$  (on distinguera suivant  $k < \ell$  ou  $k \geq \ell$ ). Donner la loi conjointe de X et Y. Retrouver à partir de celle-ci les lois marginales de X et de Y.
5. X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer  $E(Y)$ .

**Exercice 8.** Dans un magasin, on modélise le nombre de clients dans une journée par une VAD X suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

La probabilité qu'un client effectue un achat dans le magasin est égale à p (avec  $p \in ]0, 1[$ ). On note Y le nombre de clients effectuant un achat dans la journée.

1. Déterminer la loi de Y sachant  $(X = n)$
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .
4. Déterminer la loi de  $X - Y$ .

5. (a) Établir l'indépendance des variables aléatoires  $Y$  et  $X - Y$ .
- (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 9.** Soient  $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .  $p$  personnes montent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble. L'ascenseur peut monter aux étages  $1, 2, \dots, n$ . Chaque personne appuie sur un étage ; les  $p$  personnes agissent de manière indépendante. On cherche à déterminer l'espérance du nombre de boutons allumés (noté  $N$ ). Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle  $X_i$  la variable aléatoire valant 1 si le bouton de l'étage  $i$  est allumé et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de  $X_i$ .
2. Exprimer la variable aléatoire  $N$  en fonction des  $X_i$ . En déduire  $\mathbb{E}(N)$ .
3. Compléter la fonction Python ascenseur suivante qui prend en arguments les entiers  $n$  et  $p$  et renvoie une valeur de  $N$ .  
Dans ce code, le `np.array boutons` a autant de composantes que d'étages de l'immeuble ; la composante d'indice  $i$  vaut 1 ssi le bouton de l'étage  $i + 1$  est allumé, et 0 sinon.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def ascenseur(n,p):
    boutons=np.zeros(...)
    for k in ... :
        choix_etage=...
        if ...
        ...
# dans les deux lignes précédentes, on met à jour l'état des boutons
# en prenant en compte l'étage choisi par la personne k
return ...
```

4. On cherche maintenant à calculer la variance de  $N$ .
  - (a) Soient  $i \neq j$ . Montrer que le produit  $X_i X_j$  est une variable de Bernoulli, et donner son paramètre.
  - (b) Justifier que  $N^2 = \sum_{i=1}^n X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$ .  
En déduire  $\mathbb{E}(N^2)$  puis  $V(N)$ .

**Exercice 10. (EDHEC 2018)**

On dispose de trois pièces :

- une pièce numérotée 0, non biaisée ;
- une pièce numérotée 1, donnant « Pile » à coup sûr ;
- et une troisième pièce, numérotée 2, donnant « Face » à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment. Pour tout  $i$  de  $\{0, 1, 2\}$ , on note  $A_i$  l'événement : « on choisit la pièce numérotée  $i$  » ; pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_k$  l'événement : « on obtient « Pile » au lancer  $k$  » et on pose  $F_k = \overline{P_k}$ .

On considère la variable aléatoire  $X$ , égale au rang d'apparition du premier « Pile » et la variable aléatoire  $Y$ , égale au rang d'apparition du premier « Face ».

On convient que  $X$  vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Pile », et que  $Y$  vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Face ».

1. (a) Calculer les probabilités  $\mathbb{P}_{A_i}(X = 1)$  pour  $i = 0, 1, 2$  (on justifiera ses réponses !)  
En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(X = 1)$ .
- (b) Montrer que :  $\forall n \geq 2, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
- (c) En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(X = 0)$ .

2. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que  $X(X - 1)$  possède une espérance. En déduire que  $X$  possède une variance et la calculer.
4. Justifier que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .
5. (a) Montrer que, pour tout entier  $j$  supérieur ou égal à 2,  $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$ .  
 (b) Montrer que, pour tout entier  $i$  supérieur ou égal à 2,  $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$ .
6. Loi de  $X + Y$ .
  - (a) Expliquer pourquoi  $X + Y$  prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
  - (b) Justifier que  $(X = 0) \cap (Y = 1) = (X = 0)$ .
  - (c) Montrer que  $\mathbb{P}(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$ .
  - (d) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

On pourra introduire le système complet d'événements associé au premier lancer de pièce.

- (e) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

## 7. Informatique.

Dans ce programme, on décide de coder « Pile » par 1 et « Face » par 0 .

- (a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle calcule et renvoie la valeur prise par la variable aléatoire  $X$  lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
import numpy.random as rd
def simulX():
    piece = rd.randint(...)
    x = 1
    if piece == 0:
        lancer = ....
        while lancer == 0:
            lancer = .....
            x = .....
    else:
        if piece == 1:
            x = .....
    return x
```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

**Exercice 11.** On désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On lance  $n$  fois une pièce de monnaie donnant « Pile » avec la probabilité  $p$  (avec  $0 < p < 1$ ) et « Face » avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

On appelle  $k$ -chaîne de « Pile » une suite de  $k$  lancers consécutifs ayant tous donnés « Pile », cette suite devant être précédée d'un « Face » ou débiter le tirage, et suivie d'un « Face » ou terminer le tirage.

Pour tout  $k$  de  $[1, n]$  on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre total de  $k$ -chaînes de « Pile » obtenues au cours des  $n$  lancers.

Par exemple, avec  $n = 11$ , si l'on a obtenu les résultats P,P,F,F,P,P,F,P,F,P, alors

- $Y_1 = 2$  (deux 1-chaînes aux lancers 9 et 11)
- $Y_2 = 1$  (une 2-chaîne aux lancers 1 et 2)

- $Y_3 = 1$  (une 3-chaîne aux lancers 5,6,7)
- et pour tout  $k \geq 4$ ,  $Y_k = 0$ .

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'espérance de  $Y_k$ , notée  $E(Y_k)$ .

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pourra noter  $P_k$  l'événement : « on obtient « Pile » au  $k$ -ème lancer », et  $F_k$  l'événement : « on obtient « Face » au  $k$ -ème lancer ».

### 1. Simulation informatique.

- (a) Compléter le code de la fonction suivante, qui renvoie les longueurs des  $k$ -chaînes de Pile rencontrées sur une succession de  $n$  tirages.

Par exemple, sur les 11 tirages décrits précédemment, on obtient **P,P,F,F,P,P,P,F,P,F,P**, et la fonction renverra  $[2, 3, 1, 1]$ .

```
def chaines(n,p):
    """ simule l'expérience décrite sur n lancers,
    avec une proba p de faire Pile """
    L=[] # contiendra les longueurs des chaînes successives
    i=0 # comptera la longueur d'une chaîne de Pile
    for k in ... :
        if ... : # le lancer renvoie Pile
            i = ...
        else:
            if ... : # si chaîne non vide
                ... # on ajoute sa longueur à la liste
            i = ...
    if i>0 : # pour une dernière chaîne !!
        ...
    return L
```

- (b) En déduire une commande, utilisant cette fonction, qui renvoie, pour une expérience donnée, la liste  $[Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)]$ .

### 2. Déterminer la loi de $Y_n$ et donner $E(Y_n)$ .

### 3. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ . et donner $E(Y_{n-1})$ .

### 4. Dans cette question, $k$ désigne un entier de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ .

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on note  $X_{i,k}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si une  $k$ -chaîne de « Pile » commence au  $i$ -ème lancer et qui vaut 0 sinon.

- (a) Calculer  $P(X_{1,k} = 1)$ .
- (b) Soit  $i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket$ . Montrer que  $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$ .
- (c) Montrer que  $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$ .
- (d) Exprimer  $Y_k$  en fonction des variables  $X_{i,k}$ , puis déterminer  $E(Y_k)$ .

**Exercice 12.** Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés  $C_1, C_2, C_3$  arrivent en même temps. Les clients  $C_1$  et  $C_2$  se font servir tandis que le client  $C_3$  attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit  $X_1, X_2, X_3$  les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients  $C_1, C_2, C_3$  respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables  $X_1, X_2, X_3$  suivent la loi géométrique de paramètre  $p$ ,  $p \in ]0, 1[$  et qu'elles sont indépendantes. On note  $q = 1 - p$ .

On note A l'événement: «  $C_3$  termine en dernier son opération ».

NB : si  $C_3$  termine en même temps que l'autre client restant, on considère que A n'est pas réalisé.

On se propose de calculer la probabilité de A.

On définit la variable aléatoire  $\Delta = |X_1 - X_2|$ .

1. Montrer que  $\mathbb{P}(\Delta = 0) = \frac{p}{1+q}$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - (a) Justifier:  $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = k) \mathbb{P}(X_1 = n + k)$ .
  - (b) En déduire:  $\mathbb{P}(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$ .
3. (a) Montrer que  $\Delta$  admet une espérance  $\mathbb{E}(\Delta)$  et la calculer.  
 (b) Montrer:  $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$ . En déduire que  $\Delta$  admet une variance  $V(\Delta)$  et la calculer.
4. Montrer que l'événement  $A$  est égal à l'événement  $(X_3 > \Delta)$ .
5. (a) En déduire:  $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\Delta = k) \mathbb{P}(X_3 > k)$ .  
 (b) Exprimer  $\mathbb{P}(A)$  à l'aide de  $p$  et  $q$ .

**6. Simulation informatique.**

- (a) On conserve les notations de l'exercice, et on suppose que  $C_1$  termine son opération avant  $C_2$ . Donner en fonction de  $X_1, X_2, X_3$  le temps au bout duquel  $C_3$  termine son opération.
- (b) Décrire le résultat de la commande Python :

```
rd.geometric(1/3, 3)
```

- (c) Compléter le programme suivant pour qu'il modélise l'expérience aléatoire de cet exercice : le programme devra renvoyer 1 lorsque l'événement  $A$  est réalisé, et 0 sinon.

```
def tirage(p):
    temps = ..... # tirage des 3 temps de passage
                  # suivant G(p)
    if ... : # 1 finit avant 2~: 3 va au guichet libéré par 1

        if ... : # 2 finit avant 3
            a = ...
        else :
            a = ...
    else:
        if ... :
            ...
        else :
            ...
    return a
```

- (d) Comment utiliser ce programme pour obtenir une valeur approchée de  $P(A)$  ?

**Exercice 13** (EDHEC 2022). On désigne par  $n$  un entier naturel non nul, par  $p$  un réel de  $]0, 1[$  et on pose  $q = 1 - p$ .

Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre,  $n$  niveaux numérotés  $1, 2, \dots, n$ , ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les  $n$  niveaux du jeu. Pour tout entier  $k$  de  $[1, n - 1]$ , on dit que le joueur a le niveau  $k$  si, et seulement si, il a réussi le niveau  $k$  et échoué au niveau  $k + 1$ . On dit que le joueur a le niveau  $n$  si, et seulement si, il a réussi le niveau  $n$  et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.

On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à  $p$ , la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à  $p$ .

On note  $X_n$  le niveau du joueur et on admet que  $X_n$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Pour tout  $k$  de  $[1, n]$ , on note  $R_k$  l'événement : « le joueur réussit le niveau  $k$  ».

1. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par  $X_n$  dès que l'utilisateur saisit une valeur pour  $p$ .

```
import numpy.random as rd
p=float(input(' entrez la valeur de p dans ]0;1[ :'))
n=int(input(' entrez la valeur de n :'))
X=-----
while ----- and rd.random() <=p :
    X=-----
print('le niveau du joueur est :',X)
```

2. (a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$  est  $X_n(\Omega) = [0, n]$ .  
 (b) Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ .  
 (c) Écrire l'événement  $(X_n = n)$  à l'aide de certains des événements  $R_k$  puis déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .  
 (d) Écrire, pour tout entier  $k$  de  $[1, n - 1]$ , l'événement  $(X_n = k)$  à l'aide de certains des événements  $R_k$  puis déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = k)$ . Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour  $k = 0$ .
3. Vérifier par le calcul que  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) = 1$ .
4. (a) Expliquer pourquoi  $X_n$  admet une espérance et écrire cette dernière en fonction d'une somme dépendant de  $n$  et de  $p$ , qu'on ne cherchera pas à calculer.  
 (b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ .
5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k+1$ , on a  $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k q$ .  
 (b) Pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé, déterminer  $a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ .  
 (c) Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $X$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = a_k$ .  
**NB : les cubes auront reconnu  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .**  
 (d) On pose  $Y = X+1$ . Reconnaître la loi de  $Y$  puis en déduire l'espérance de  $X$ . Comparer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ .

## Un peu plus théorique

### Exercice 14 (Implications et inclusions).

On rappelle que si  $A$  et  $B$  sont deux événements tels que  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ . On donne ici quelques exemples de raisonnements qui permettent de passer d'une implication logique à une inégalité sur les probabilités.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire, et  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .  
 (a) Justifier rigoureusement que  $(X \leq a) \subset (X \leq b)$ .  
 (b) En déduire la monotonie de la fonction de répartition de  $X$ , définie par  $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ .
2. On effectue une succession illimitée de lancers d'une pièce de monnaie. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement : « le premier Pile arrive après le  $k$ -ème lancer ». Donner la monotonie de la suite  $(\mathbb{P}(A_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Dans une urne contenant initialement un certain nombre de boules rouges et de boules bleues, on effectue des tirages successifs. Si on tire une boule rouge, on l'enlève de l'urne, et on la remplace par une bleue ; si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne.  
 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle  $Y_n$  le nombre de boules rouges dans l'urne après  $n$  tirages. Montrer que  $\mathbb{P}(Y_n = 0) \leq \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$ . En déduire la convergence de la suite  $(\mathbb{P}(Y_n = 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 15** (Indicatrices).

Soit  $A$  un événement. On définit la variable aléatoire de Bernoulli  $\mathbb{1}_A$  de la manière suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ ssi } \omega \in A, \text{ et } \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

Autrement dit  $\mathbb{1}_A = 1$  ssi l'événement  $A$  est réalisé.

On appelle  $\mathbb{1}_A$  l'*indicatrice de l'événement*  $A$ .

1. Déterminer la loi de  $\mathbb{1}_A$ . En déduire  $E(\mathbb{1}_A)$  et  $V(\mathbb{1}_A)$ .
2. Montrer que  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ .
3. Montrer que si  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements, alors  $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$  est la variable constante égale à 1.
4. Montrer que  $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)) = \mathbb{P}(A \cap B)$ .  
En déduire que si  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$  sont indépendantes, alors  $A$  et  $B$  sont indépendants.
5. On rappelle que si  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants, alors les événements  $\bar{A}$  et  $B$  le sont également, ainsi que les événements  $A$  et  $\bar{B}$ , et les événements  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .  
Montrer que si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$  sont indépendantes.
6. Montrer que  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ .

## Indications

- 2**
- 1.
  2. Comparer  $P((X = x) \cap (Y = y))$  à  $P(X = x) \times P(Y = y)$  pour des valeurs de  $x$  et  $y$  bien choisies.
  - 3.
  4. Pour des  $k$  convenables, détailler toutes les possibilités qui mènent à  $X + Y = k$
  5. On raisonne comme dans le point précédent.
- 3**
- 1.
  2. Une fois n'est pas coutume, il est plus pratique de considérer l'événement  $(X = i) \cap (Y = j)$ . À quelle(s) succession(s) de lancers correspond-il ?
  3. Le premier Pile arrive avant le second... mais cette phrase seule ne constitue pas une preuve.
  - 4.
- 4**
- 1.
  2. Pour calculer  $P(X \geq k)$ , on peut sommer les  $P(X = i)$  pour  $i \geq k$ . Dans le cas précis de la loi géométrique il existe un raccourci : interpréter l'événement  $(X \geq k)$  en termes de succès/échecs.
  3. Pour  $X + Y$  : pour quelles valeurs de  $X$  et  $Y$  a-t-on  $X + Y = k$  ?
- 5** C'est du cours !!
- 6**
1. Dans les deux premières questions on calcule la proba de l'union d'événements  $(X = i) \cap (Y = k - i)$ . Mais la somme ne porte que sur des valeurs possibles pour  $X$  et  $Y$ .
  - 2.
  3. Cette fois on utilise les événements  $(X + Y = k) \cap (Z = k)$ .
- 7**
- 1.
  2. On est en équiprobabilité. Qu'est-ce ici qu'une « issue » ? Compter alors le nombre total d'issues. Puis compter le nombre d'issues menant à  $(X = k)$
  3. De même,...
  4. Ici encore dénombrer les issues menant à l'événement qui nous intéresse.
  - 5.
  - 6.
- 8**
1. Nombre d'acheteurs sur  $n$  clients... prendre le temps de justifier correctement.
  - 2.
  3. Manière habituelle de retrouver une marginale à partir de la conjointe... les calculs ne sont pas évidents, faire apparaître des séries exponentielles. Et se souvenir que  $P_{(X=n)}(Y = k)$  peut, dans certains cas, être nulle !!
  4. On peut procéder par probas totales ; ou se demander quelle signification donner à la valeur de  $X - Y$  dans le contexte de l'exercice ?
  5. (a) Appliquer la définition.  
(b) Utiliser l'indépendance de  $Y$  et  $X - Y$  !
- 9**
1. L'événement  $(X_i = 0)$  est beaucoup plus maniable que  $(X_i = 1)$ .
  2.  $N$  compte le nombre de  $X_i$  égaux à 1.
  3. Le choix de l'étage est aléatoire. Si on appuie sur un bouton déjà allumé, il ne se passe rien ; si on appuie sur un bouton éteint il s'allume.
- 10**
1. (a)  $\mathbb{P}_{A_i}(X = 1)$  dépend des caractéristiques de la pièce  $i$ .  
Ensuite formule des probas..... ?  
(b) Même formule ; et même réflexion pour les  $\mathbb{P}_{A_i}(X = n)$ .  
(c) Propriété d'une loi de proba.
  - 2.
  3. Théorème de transfert. On ne prend pas la variable  $X(X - 1)$  par perversité, mais justement parce que ça s'arrange bien. *Trick* classique.
  4. Ne pas faire de calcul et penser à un argument de « symétrie » .
  5. (a) Justifier que les événements sont égaux.  
(b) idem.
  6. (a) Discussion un peu subtile. Pour bien justifier : décrire, pour toute valeur  $k \in (X + Y)(\Omega)$ , un déroulé de l'expérience menant à  $X + Y = k$ .  
(b) Quels scénarios modélisent ces deux événements ?  
(c)

- (d) Ne pas oublier d'expliquer, par une phrase, pourquoi  $([X+Y = n] \cap [X = 1]) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1])$  (et idem pour le second terme).
- (e)
7. (a) Traduire, assez littéralement, le protocole expérimental.  
 (b) Que faut-il renvoyer si on tire la pièce 2 ?
- 11** 1. (a)  
 (b) Il faut donc compter le nombre de 1 dans le résultat renvoyé par la fonction de la question précédente ; puis le nombre de 2 ; etc...
2. Quelles sont les possibilités pour obtenir une (ou des)  $n$ -chaîne(s) sur  $n$  lancers ?
3. Et pour des  $(n - 1)$ -chaînes ? Cette fois il y a 2 possibilités (à décrire en événements)
4. (a) Ne pas oublier le Face qui conclut la  $k$ -chaîne de Pile.  
 (b) Idem... mais cette fois il faut aussi que la chaîne commence *exactement* au lancer  $i$ .  
 (c) Ici encore : il faut prendre en compte le fait que certains lancers tombent sur Face.  
 (d)  $Y_k = \sum_i X_{i,k}$  mais bien réfléchir aux bornes de cette somme : où peut commencer une  $k$ -chaîne ?
- 12** 1. C'est la probabilité que  $X_1 = X_2$ . Sommer sur toutes les valeurs possibles de  $X_1$ .
2. (a) On balaie donc toutes les valeurs possibles de  $X_1$  ...  
 (b) En déduire.
3. (a)  
 (b) Ne pas calculer de somme infinie, mais manipuler les diverses espérances et variances en jeu.
4. Interpréter les définitions de l'énoncé.
5. (a)  
 (b) Calculer !
- 6. Simulation informatique.**
- (a) Il faut distinguer 2 (ou 3) cas sur les clients  $C_1$  et  $C_2$ .  
 (b)  
 (c)  
 (d) Intuitivement ? Essayer de formaliser ensuite, mais à ce stade de l'année on n'a pas tous les outils pour le faire très rigoureusement.
- 13** 1.  
 2. (a) Pour une justification soigneuse, expliciter, pour chaque valeur  $k \in X_n(\Omega)$  un « scénario » qui mène à  $X_n = k$ .  
 (b)  
 (c) Quelle succession d'événements (en partant du début du jeu !) mène à  $(X_n = n)$  ?  
 (d) idem.
- 3.
4. (a) On trouve  $E(X_n) = (1 - p)p \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$ .  
 (b) Série usuelle !
5. (a)  $n \leq k + 1 \Leftrightarrow k \leq n - 1$  : déjà vu !  
 (b) Il n'y a aucun calcul à faire ici.  
 (c) Cours : il y a des conditions simples pour qu'une suite  $(a_k)$  soit la loi de proba d'une certaine variable aléatoire.  
 (d)
- 14** Dans les trois cas : il faut savoir mettre en relation une implication entre deux propriétés  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$  et une inclusion entre les événements «  $\mathcal{P}$  est réalisée » et «  $\mathcal{P}'$  est réalisée » .
- 15** 1. Comme le précise l'énoncé, on a  $A = (\mathbb{1}_A = 1)$  (égalité entre événements).
2. Montrer que si  $\omega \in A \cap B$ , alors  $\mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$ .  
 Puis traiter les autres possibilités pour l'issue  $\omega$ .
3. Si  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements, et si  $\omega$  est une issue, à combien de  $A_i$  appartient  $\omega$  ? Essayez de justifier le plus rigoureusement possible.
4. Revenir à la définition de l'indépendance d'événements.
5. Noter que  $\bar{A} = (\mathbb{1}_A = 0)$ .
6. Vérifier cela pour toute issue  $\omega$  en distinguant plusieurs cas :  $\omega \in A$  ou pas ;  $\omega \in B$  ou pas.