ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

DM2
À rendre pour le 14/10

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, le numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro du tirage précédent.
Par exemple, si $n = 5$, et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2, alors $X_5 = 4$ (car $5 > 3 > 2$ puis $2 \leqslant 2$).
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$?

Partie I : Simulation informatique

2. On cherche à écrire une fonction Python qui prend pour argument l'entier $n \geqslant 2$, effectue cette expérience, et renvoie une simulation de X_n.
   (a) Un entier n étant donné, quelle commande permet de renvoyer un tirage d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$?
   (b) Écrire une fonction `experience(n)` qui prend en argument le nombre `n` de boules dans l'urne et renvoie `(L,X)` où
   - `L` contient la liste des numéros des boules tirées ;
   - `X` prend la valeur du tirage de X_n sur l'expérience modélisée.

   Ainsi, dans l'exemple décrit plus haut, l'appel `experience(5)` *devra renvoyer* `([5,3,2,2],4)`.

Partie II : Étude du cas $n = 3$

On suppose, **dans cette partie uniquement**, que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1,2,3.

3. (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(X_3 = 3)$.
4. Calculer l'espérance de X_3.

Partie III : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de N_k, et rappeler (sans démonstrations) son espérance et sa variance.
6. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n+1)$.
7. Montrer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}_{(N_1 = i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
8. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
9. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
   (a) Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = \big(N_1 > N_2 > \cdots > N_k\big)$.
   (b) Montrer qu'il existe exactement $\dbinom{n}{k}$ k-uplets $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$ tels que $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$.
   (c) En déduire : $\mathbb{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   (d) Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$.
10. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X_n > k-1)$ et de $\mathbb{P}(X_n > k)$.
    On démontrera le résultat affirmé.

11. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)$.

12. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

13. En appelant la fonction `experience` codée dans la question 2, proposer un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_{10})$.

Partie IV : Convergences

14. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$; en déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.

15. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge, et calculer sa somme.

16. On admet l'existence d'une variable aléatoire Z, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, telle que :

$$\forall\, k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

Montrer que Z admet une espérance ; comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.