

DM2bis À rendre pour le 14/10

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs.

Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs., on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal 1, on pose les événements suivants :

- F_n : obtenir Face au n -ième lancer ;
- P_n : obtenir Pile au n -ième lancer.

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : «Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs » ;
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbb{P}(U_n) \text{ et } a_n = \mathbb{P}(X = n).$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k . En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .

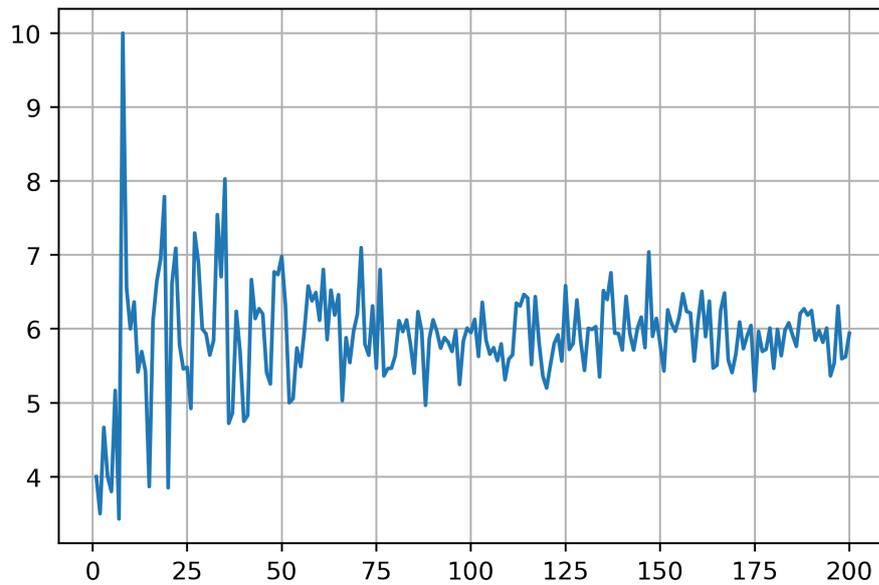
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile ..... :
        if rd.random() < 1/2:
            pile=pile+1
        else :
            pile = ....
            tirs= .....
    return tirs
```

(b) Écrire une fonction Python d'entête `moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

(c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $[1, 200]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- (b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

- (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
 6. En déduire que :

$$\mathbb{P}(X = -1) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0$$

On admettra ici un théorème de limite monotone :

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (ie : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}(X = k)$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

11. Montrer que X admet une espérance.

12. (a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

(b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente. À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.

(c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .