DM2
Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, le numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro du tirage précédent.
Par exemple, si $n = 5$, et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2, alors $X_5 = 4$ (car $5 > 3 > 2$ puis $2 \leqslant 2$).
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

1. **Que vaut $X_n(\Omega)$?**

   La valeur minimale de X_n est obtenue quand la seconde boule est $\geqslant$ à la première, ce qui peut arriver dès le 2ème tirage (ex : tirer 1 puis 2).
   La valeur maximale est obtenue pour les tirages successifs n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 (donc n tirages) : le $(n+1)$-ème tirage, quelle que soit la boule tirée, achèvera l'expérience. X_n vaut alors $n+1$.
   On a donc $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

Partie I : Simulation informatique

2. **On cherche à écrire une fonction Python qui prend pour argument l'entier $n \geqslant 2$, effectue cette expérience, et renvoie une simulation de X_n.**

   (a) **Un entier n étant donné, quelle commande permet de renvoyer un tirage d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$?** `rd.randint(1,n+1)`. (une fois les imports usuels réalisés)

   (b) **Écrire une fonction `experience(n)` qui prend en argument le nombre `n` de boules dans l'urne et renvoie `(L,X)` où**

   - **`L` contient la liste des numéros des boules tirées ;**
   - **`X` prend la valeur du tirage de X_n sur l'expérience modélisée.**

   ***Ainsi, dans l'exemple décrit plus haut, l'appel* `experience(5)` *devra renvoyer* `([5,3,2,2],4)`.**
   On peut proposer :

```python
def experience(n):
    L=[rd.randint(1,n+1)] # première boule
    boule = rd.randint(1,n+1) # seconde boule
    k = 2
    while boule<L[-1]: # on compare la boule tirée au dernier élément de L
        L.append(boule)
        boule = rd.randint(1,n+1) # on en tire une nouvelle
        k = k+1
    L.append(boule) # on ajoute la dernière boule
    return L,k
```

Partie II : Étude du cas $n = 3$

On suppose, dans cette partie uniquement, que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1,2,3.

3. (a) **Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.**

   $X_3 = 4$ si et seulement si les trois premiers tirages sont : 3,2,1 (la boule suivante sera ensuite forcément $\geqslant 1$). On a donc

   $$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_1 = 1)$$

   Par indépendance des trois tirages, on a donc $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$.

(b) **Montrer que** $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$**, et en déduire** $\mathbb{P}(X_3 = 3)$**.**

$(X_3 = 2)$ ssi le second tirage est supérieur ou égal au premier. On a donc les possibilités :

$$1,1 \qquad 1,2 \qquad 1,3 \qquad 2,2 \qquad 2,3 \qquad 3,3$$

Donc 6 tirages donnant $X_3 = 2$, sur 9 tirages possibles de deux boules. On trouve bien

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

X_3 étant à valeurs dans $\{2,3,4\}$, on a $\mathbb{P}(X_3 = 2) + \mathbb{P}(X_3 = 3) + \mathbb{P}(X_3 = 4) = 1$; ceci donne

$$\mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}$$

4. **Calculer l'espérance de** X_3**.**

Par définition,

$$\mathbb{E}(X_3) = 2 \times \mathbb{P}(X_3 = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X_3 = 3) + 4 \times \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{4}{3} + \frac{24}{27} + \frac{4}{27} = \frac{64}{27}$$

Partie III : Cas général

Dans toute cette partie, n **est un entier fixé, supérieur ou égal à 2.**

5. **Pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$**, déterminer la loi de** N_k**, et rappeler (sans démonstrations) son espérance et sa variance.**

Les tirages étant équiprobables et avec remise, pour tout k, N_k suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On a donc $\mathbb{E}(N_k) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

6. **Calculer** $\mathbb{P}(X_n = n+1)$**.**

$X_n = n+1$ ssi les n premiers tirages sont $n, n-1, \ldots, 2, 1$. Par indépendance de ces tirages, on a donc $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

7. **Montrer, pour tout** $i \in [\![1, n]\!]$ **:** $\mathbb{P}_{(N_1 = i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$**.**

En supposant que $N_1 = i$, $X_n = 2$ ssi le second tirage N_2 appartient à $\{i, i+1, \ldots, n\}$. Ce dernier ensemble comporte $n-i+1$ éléments : par équiprobabilité, $\mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

8. **En déduire une expression simple de** $\mathbb{P}(X_n = 2)$**.**

On utilise la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\left\{(N_1 = i)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Par équiprobabilité, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}(N_1 = i) = \dfrac{1}{n}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) \times \mathbb{P}(N_1 = i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (n+1) - \sum_{i=1}^{n} i \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
\mathbb{P}(X_n = 2) &= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

NB : pour $n = 3$ on retrouve bien $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

9. **Soit** $k \in [\![2, n]\!]$.

   (a) **Justifier l'égalité d'événements suivante :** $(X_n > k) = \big(N_1 > N_2 > \cdots > N_k\big)$**.**
   Par définition, $X_n > k$ ssi les k premiers tirages forment une suite strictement décroissante, ce qui donne bien l'égalité recherchée.

   (b) **Montrer qu'il existe exactement** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ k**-uplets** $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in [\![1, n]\!]^k$ **tels que** $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$**.**

   Il s'agit donc de dénombrer les suites strictement décroissantes de k entiers de $[\![1, n]\!]$: on peut voir qu'il existe autant de telles suites que de parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments (une partie donnée correspond à une seule suite car on impose l'ordre dans lequel les éléments sont rangés). On obtient bien $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ k-uplets.

   (c) **En déduire :** $\mathbb{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$**.**

   L'ensemble total des tirages possibles (k tirages avec remise) a pour cardinal n^k. Par équiprobabilité on a

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

   (d) **Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour** $k = 0$ **et** $k = 1$**.**

   Pour $k = 0$, on a $\mathbb{P}(X_n > 0) = 1$ d'après les définitions de l'énoncé ; et $\dfrac{1}{n^0}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

   Pour $k = 1$, on a $\mathbb{P}(X_n > 1) = 1$ d'après les définitions de l'énoncé ; et $\dfrac{1}{n^1}\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n} \times n = 1$.

   La formule est donc encore vraie pour $k = 0$ et 1.

10. **Exprimer, pour tout** $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ **à l'aide de** $\mathbb{P}(X_n > k-1)$ **et de** $\mathbb{P}(X_n > k)$**.**
    On démontrera le résultat affirmé.

    La variable aléatoire X_n étant à valeurs entières, on a : $(X_n > k-1) = (X_n = k) \cup (X_n > k)$; cette union est disjointe, ce qui donne $\mathbb{P}(X_n > k-1) = \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n > k)$, puis :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)$$

11. **En déduire :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)$**.**

    On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=2}^{n+1} k\big(\mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k) \\
&= 2\mathbb{P}(X_n > 1) + \sum_{k=2}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X_n > k) - (n+1)\underbrace{\mathbb{P}(X_n > n+1)}_{=0} \\
&= 2\mathbb{P}(X_n > 1) + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\big((k+1) - k\big)}_{=1}\mathbb{P}(X_n > k) \\
&= \mathbb{P}(X_n > 1) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)
\end{aligned}$$

    Or $\mathbb{P}(X_n > 1) = 1 = \mathbb{P}(X_n > 0)$; donc on trouve bien

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)$$

12. **Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.**

On déduit de l'expression précédente, par la formule du binôme de Newton :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(NB : pour $n = 3$ on trouve ainsi $\mathbb{E}(X_3) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$ ce qui est cohérent avec la valeur trouvée plus haut.

13. **En appelant la fonction `experience` codée dans la question 2, proposer un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_{10})$.**

Il suffit de renvoyer la moyenne d'un assez grand nombre de tirages de X_{10}. On peut être concis :

```
print(np.mean([experience(10)[1] for k in range(10000)]))
```

La commande `experience(10)[1]` est égale à la seconde composante du doublet que renvoie la fonction `experience` : c'est bien la valeur de X.
On obtient

```
2.5986
```

à comparer avec $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \simeq 2.5937$.

Partie IV : Convergences

14. **Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.**

À k fixé et $n \to +\infty$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

donc $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}$; puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$.

En reprenant le résultat des questions 9c et 10 :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$

et donc pour $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$$

15. **Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge, et calculer sa somme.**

Il faut passer par les sommes partielles et reconnaître la manip précédente.
Pour $N \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = 1 - \frac{1}{N!} \quad \text{par téléscopage}$$

donc pour $N \to +\infty$ on obtient la convergence de la somme, et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1$$

16. **On admet l'existence d'une variable aléatoire Z, à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$, telle que :**

$$\forall\, k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

Montrer que Z admet une espérance ; comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Z admet une espérance ssi la série de terme général $k\mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{k(k-1)}{k!} = \dfrac{1}{(k-2)!}$ converge absolument : c'est le cas car c'est une série exponentielle.

On a alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

De plus $\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et on a vu et revu (mais il faudra le montrer le jour du concours !) que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Z)$.