Ecricome 2021, voie E

Une solution proposée par Frédéric Gaunard (Lycée Français de Vienne, frederic@gaunard.com).
Merci à Romain Meurant (Lycée Descartes, Rabat) pour sa relecture avisée et ses conseils.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \qquad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Par définition de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \alpha I_3 \in \mathcal{A} &\iff \alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0_3 \\ &\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)I_3 = 0_3 \\ &\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \\ &\iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ ou } \alpha = -2. \end{aligned}$$

(2) D'après la question précédente, $-I_3$ et $-2I_3$ sont deux matrices de $\mathcal{A}$. Or, $-I_3 + (-2I_3) = -3I_3 \notin \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ n'est pas stable par addition et ne peut donc pas être un sous-espace vectoriel de E.

(3) On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) On fait le calcul

$$BX_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X_1, \qquad BX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2.$$

(b) On déduit des deux calculs précédents (et du fait que les vecteurs X_1 et X_2 sont non nuls) que X_1 est vecteur propre de B associé à la valeur propre -2 et que X_2 est vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. En particulier, -1 et -2 sont deux valeurs propres de B.
Une base des sous-espaces propres correspondants s'obtient en résolvant $BX = \lambda X$ pour $\lambda \in \{-1; -2\}$.

- Pour $\lambda = -1$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \iff (B + I_3)X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x = y = z$$

$$\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En particulier, (X_2) forme une base de $E_{-1}(B)$ qui est donc de dimension 1.

- Pour $\lambda = -2$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(B) \iff (B + 2I_3)X = 0$$

$$\iff x - y + z = 0$$

$$\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_{-2}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc $\left(X_1, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $E_{-2}(B)$ qui est alors de dimension 2.

(c) On a trouvé deux valeurs propres dont la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est 3. On peut alors conclure que ce sont les seules valeurs propres de B et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de B est égale à l'ordre de B, celle-ci est diagonalisable.
En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres $\left(X_2; X_1, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (qui en est bien une par principe de concaténation), la formule de changement de base donne bien $B = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) Il est facile de voir que D vérifie la relation $(*)$

$$D(D+I_3)(D+2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

donc $D \in \mathcal{A}$. Mais alors,

$$\begin{aligned} B(B+I_3)(B+2I_3) &= PDP^{-1}\left(PDP^{-1}+I_3\right)\left(PDP^{-1}+2I_3\right) \\ &= PDP^{-1}\left(PDP^{-1}+PP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}+P2I_3P^{-1}\right) \\ &= PDP^{-1}P(D+I_3)P^{-1}P(D+2I_3)P^{-1} \\ &= PD(D+I_3)(D+2I_3)P^{-1} \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

et B appartient bien également à $\mathcal{A}$.

(4) Soit M une matrice diagonalisable dont le spectre est inclus dans $\{0; -1; -2\}$. Il existe donc une matrice de passage inversible Q et une matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$ telles que

$$M = Q\Delta Q^{-1}.$$

On voit facilement que Δ vérifie $(*)$. En effet,

$$\Delta(\Delta+I_3)(\Delta+2I_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1+1)(\lambda_1+2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2+1)(\lambda_2+2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\lambda_3+1)(\lambda_3+2) \end{pmatrix} = 0_3$$

car comme $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$, on a nécessairement $\lambda_i(\lambda_i+1)(\lambda_i+2) = 0$. En passant à M comme dans la Question $(3d)$, on obtient que $M \in \mathcal{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

(5) La condition $(*)$ permet immédiatement d'affirmer que le polynôme $X(X+1)(X+2)$ annule la matrice M. Les racines de ce polynôme étant 0, 1 et -2, le cours permet de conclure que

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

(6) Dans ce cas, M est une matrice d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes. Le cours nous permet de conclure directement que M est diagonalisable.

(7) (a) Comme -1 est l'unique valeur propre de M, c'est l'unique réel pour lequel $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible. En particulier, M et $M + 2I_3$ sont inversibles et admettent donc des matrices inverses. En utilisant ces inverses dans la relation $(*)$ satisfaite par M, on obtient

$$0_3 = M^{-1} \cdot M(M+I_3)(M+2I_3) \cdot (M+2I_3)^{-1} = M + I_3$$

et donc $M = -I_3$.

(b) Il suffit, pour répondre à cette question, d'échanger le rôle de -1 avec celui de 0 ou de -1 avec 2. Dans le premier cas, c'est $M + I_3$ et $M + 2I_3$ qui seront inversibles et par les inverses desquelles on pourra multiplier dans $(*)$ pour obtenir $M = 0_3$ dans l'autre c'est M et $M + I_3$ qui sont inversibles et qui mènent à $M + 2I_3 = 0_3$ ou encore $M = -2I_3$.

(8) On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre. Ainsi, pour tout réel λ, les matrices $M - \lambda I_3$ sont inversibles, c'est le cas en particulier pour M, $M + I_3$ et $M + 2I_3$. En multipliant par leurs inverses dans $(*)$ on aboutit à

$$0_3 = M^{-1} \cdot M(M + I_3)(M + 2I_3) \cdot (M + 2I_3)^{-1} \cdot (M + I_3)^{-1} = I_3,$$

ce qui est absurde. Ainsi, M admet au moins une valeur propre.

(9) Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes et on traite ici le cas $\{-1; -2\}$. Comme le précise l'énoncé, les autres situations (c'est à dire couplages de valeurs propres dans $\{-1, -2, 0\}$) se traitent exactement e la même manière.
On suppose que M n'est pas diagonalisable.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la amtrice dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Comme, par hypothèse, 0 n'est pas valeur propre de M, M est inversible et en multipliant à gauche par M^{-1} dans $(*)$, on obtient

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3.$$

Sachant que

$$\text{Mat}(f + \text{Id}) = M + I_3, \quad \text{Mat}(f + 2\text{Id}) = M + 2I_3$$

et que

$$\text{Mat}\left((f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id})\right) = (M + I_3)(M + 2I_3),$$

on a bien

$$(f + \text{Id}) \circ (f + 2\text{Id}) = 0$$

Comme de plus les matrices correspondantes commutent

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = M^2 + 2M + M + I_3 = M^2 + 3M + I_3 = (M + 2I_3)(M + I_3),$$

on a également

$$(f + 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0.$$

(b) Les noyaux $\text{Ker}(f+\text{Id})$ et $\text{Ker}(f+2\text{Id})$ sont les sous-espaces propres respectivement associés à -1 et -2 qui sont les valeurs propres de B donc de f. Comme ces valeurs sont bien des valeurs propres, ces noyaux ne peuvent être réduits à $\{0\}$ et sont donc au moins de dimension 1.

(c) Comme M n'est pas diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres (à savoir les deux noyaux susmentionnés) ne peut être égale à 3. Cette somme est donc inférieure ou égale à 2. Comme elle est au moins égale à $1+1 = 2$, elle est en fait exactement égale à 2 et donc chacun des deux sous-espaces propres est de dimension égale à 1.

(d) Soit u un vecteur propre (donc non nul) de f associé à la valeur propre -1.
Soit v un vecteur propre (également non nul) de f associé à la valeur propre -2.

(i) Par principe de concaténation, la famille (u, v) est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non élément de $\text{Vect}(u, v)$.
La famille (u, v, w) est alors libre. En effet, soient α, β, γ sont trois réels tels que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Si $\gamma \neq 0$, on peut écrire w comme combinaison linéaire de u et v, ce qui est contradictoire avec le fait que w n'appartient pas à $\text{Vect}(u, v)$. Donc $\gamma = 0$. Mais alors, comme (u, v) est libre, on déduit de $\alpha u + \beta v = 0$ que $\alpha = \beta = 0$. On a bien ce qu'on voulait.
La famille (u, v, w) est composée de trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension 3: elle en forme bien une base.

(iii) Comme $(f+2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id}) = (f+\mathrm{Id})\circ(f+2\mathrm{Id}) = 0$, on retrouve bien 0 si on applique ces composées à w. Ce qui se traduit d'une part par le fait que

$$(f+2\mathrm{Id})(w) \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u)$$

ce qui donne l'existence d'un réel α tel que

$$f(w) + 2w = (f+2\mathrm{Id})(w) = \alpha u,$$

et d'autre part par

$$(f+\mathrm{Id})(w) \in \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v)$$

ce qui fournit un réel β tel que

$$f(w) + w = (f+\mathrm{Id})(w) = \beta v,$$

comme demandé.

(iv) Il suit de la question précédente que

$$w = f(w) + 2w - (f(w) + w) = \alpha u - \beta v \in \mathrm{Vect}(u, v),$$

ce qui est contradictoire avec la construction de w qui découle de l'hypothèse de non diagonalisabilité de M. Ainsi, nécessairement, M est diagonalisable.

(10) Si $M \in \mathcal{A}$, la Question (5) nous a permis d'obtenir que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0; -1; -2\}$. Les questions qui ont suivi on permis d'obtenir successivement que M avait au moins une valeur propre. Si elle n'en a qu'une seule, la Question (7) nous a permis de conclure que M était déjà diagonale donc diagonalisable. Si M en a trois (distinctes), on a également conclus que M était diagonalisable avec la Question (6). Si M n'a que deux valeurs propres distinctes, le raisonnement (étendu) de la Question (9) a aussi permis de conclure que M était diagonalisable. Ainsi, dans tous les cas, M est diagonalisable et on a bien le sens $\Longrightarrow$ de l'équivalence demandée.

Réciproquement, si M est diagonalisable avec un spectre inclus dans $\{0, -1, -2\}$, la Question (4) a permis de conclure que M était un élément de $\mathcal{A}$.

On a bien démontré l'équivalence souhaitée.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$.

(1) (a) Étant clair que $1+t^n \longrightarrow 1$, $t \to 0$, on a $1+t^n \sim 1$, $t \to 0$, et par quotient d'équivalents, on obtient bien

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t).$$

(b) Soit $y \in]0;1]$. L'intégrale demandée, classique, se calcule par IPP. En posant,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \ln(t) \\ v'(t) & = & 1 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1/t \\ v(t) & = & t \end{array}\right. ,$$

on définit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y;1]$ rendant licite la formule d'intégration par parties qui donne

$$\begin{aligned}\int_y^1 \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_y^1 - \int_y^1 \mathrm{d}t \\ &= -y\ln(y) - [t]_y^1 \\ &= -y\ln(y) - 1 + y,\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Par croissance comparée, $y\ln(y) \longrightarrow 0$, $y \to 0$, ce qui permet de conclure à la convergence de l'intégrale considérée et d'écrire

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1.$$

(c) On a écrit précédemment que $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ était convergente. Attention, le critère de convergence par équivalence s'applique normalement à des fonctions positives, mais quitte à multiplier par -1, on peut l'appliquer à des fonctions négatives, il est simplement important que les fonctions considérées soient de signe constant. On peut donc affirmer, par critère d'équivalence, que J_n converge.

(2) (a) On voit que

$$t^{3/2}\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{3/2}\frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}.$$

Or, comme $n \geq 2$, $n - 3/2 > 0$ et un argument de croissante comparée donne

$$\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln(t)}{1+t^n} = 0.$$

(b) On a également choisi $3/2 > 1$ de sorte à pouvoir appliquer un critère de Riemann. En effet, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$$

est convergente. La limite précédente permet d'écrire que

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad t \to +\infty.$$

Ainsi, comme $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1;+\infty[$, par critère de négligeabilité (ici tout est positif), on peut conclure à la convergence de l'intégrale K_n.

(3) L'intégrale définissant I_n peut s'écrire, par Chasles, comme somme de deux intégrales (à savoir J_n et K_n) convergente; elle est donc également convergente.

Partie B

(4) (a) Soit $n \geq 2$ un entier et soit $t \in]0;1]$ un réel. On a

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = \ln(t)\left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right) = \ln(t)\left(\frac{-t^n}{1+t^n}\right).$$

Or, $\ln(t) \leq 0$ et clairement $-t^n/(1+t^n) \leq 0$. Donc $-t^n\ln(t) \geq 0$ et il suit que

$$0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{-\ln(t)t^n}{1+t^n} \leq -t^n\ln(t)$$

ce qui donne bien l'encadrement demandé.

(b) Soit $y \in]0;1]$. En posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & -\ln(t) \\ v'(t) & = & t^n \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u('t) & = & -1/t \\ v'(t) & = & t^{n+1}/(n+1) \end{array}\right.,$$

on définit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y;1]$ rendant licite la formule d'intégration par parties qui donne

$$\begin{aligned} \int_y^1 -t^n \ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)t^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 + \frac{1}{n+1}\int_y^1 t^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(y)y^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 \\ &= \frac{\ln(y)y^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &\underset{y\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

par croissance comparée. Ainsi, on a bien convergence de l'intégrale considérée qui vaut

$$\int_0^1 -t^n \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(c) D'après l'encadrement obtenu à la Question ($4a$), le fait que les trois intégrales suivantes convergent, la linéarité et la croissance de l'intégrale, on a

$$0 \le \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \le \int_0^1 -t^n \ln(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$0 \le J_n - (-1) \le \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comme $1/(n+1)^2 \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne que $J_n + 1 \longrightarrow 0$ ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = -1.$$

(5) (a) Il est bien connu que pour $x \ge 1$, $\ln(x) \ge 0$. Pour l'autre inégalité (ultra-)classique, les arguments sont nombreux. On peut par exemple dire que $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ (car de dérivée seconde strictement négative) et donc en dessous de ses tangentes, y compris celle en 0 d'équation $y = x$. Puis, comme $x \le x+1$ et que la fonction ln est croissante, on a bien

$$0 \le \ln(x) \le \ln(x+1) \le x.$$

(Observons qu'avec cette preuve, on a seulement besoin de $x > 0$.)
En multipliant cet encadrement par $1/(1+x^n)$ qui est une quantité positive (et inférieure à 1), on obtient bien

$$0 \le \frac{\ln(x)}{1+x^n} \le x \times \frac{1}{1+x^n} \le \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}.$$

(b) L'intégrale qui définit K_n est convergente et comme $n \ge 3$, $n-1 > 1$ donc par critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}}$ est également convergente. La croissance de l'intégrale appliquée à l'encadrement de la question précédente donne

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n}\mathrm{d}x \le \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}} = \left[-\frac{1}{(n-2)x^{n-2}}\right]_1^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n-2},$$

on déduit bien

$$0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}.$$

(c) Par le théorème des gendarmes, l'encadrement précédent donne

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = 0.$$

Comme $I_n = J_n + K_n$, à l'aide de la limite de J_n obtenue à la Question (4c), on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = -1 + 0 = -1.$$

Partie C

(6) Soient $n \geq 2$ un entier et $y \in]0;1]$ un réel. Le changement de variable $u = u(t) = -\ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y;1]$ donc licite et donne (observant que $t = \exp(-u)$)

$$\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = -e^{-u}\mathrm{d}u.$$

Il suit que

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+(e^{-u})^n}(-e^{-u})\mathrm{d}u = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-ue^{-u}}{1+e^{-nu}}\mathrm{d}u,$$

comme attendu.

(7) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(a) On récite le cours. En notant f une densité de X, on peut écrire

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(b) Soit $n \geq 2$. On pose $Y_n = \dfrac{-X}{1+e^{-nX}}$. D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} Y_n \text{ admet une espérance} &\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} f(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} e^{-x}\mathrm{d}x \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, d'après le changement de variable précédent,

$$\int_0^{-\ln(y)} \frac{-ue^{-u}}{1+e^{-nu}}\mathrm{d}u = \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t \underset{y\to 0}{\longrightarrow} J_n, \quad \text{et} \quad -\ln(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

on en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-ue^{-u}}{1+e^{-nu}}\mathrm{d}u$ converge et vaut J_n et donc Y_n admet une espérance et

$$E(Y_n) = J_n.$$

(8) Il suffit d'appliquer la formule qui définit Y_n en fonction de X à des réalisations successives de variables de loi exponentielles à l'aide de la boucle `for`.

```
function Y=simulY(n,m)
        Y=zeros(1,m) //  m réalisations de Y_n => on prépare m composantes
        for i=1:m
                X=grand(1,1, 'exp', 1)
                Y(i)=-X/(1+exp(-n*X))
        end
endfunction
```

(9) (a) La loi faible des grands nombres affirme que, si $U_1, U_2, ..., U_m$ sont m variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une même espérance μ et une même variance, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_1+U_2+...+U_m}{m} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

c'est à dire que la probabilité que la *moyenne empirique* s'écarte de la moyenne théorique (l'espérance) tend vers 0.

(b) Le sujet propose le code suivant:

```
n=input('n=?')
disp(mean(simulY(n,1000))
```

Ce code renvoie la moyenne des valeurs d'un échantillon de taille 1000 de Y_n (où n est rentré par l'utilisateur). D'après la Loi faible des grands nombres rappelée ci-dessus, l'échantillon étant de taille assez grande (1000), la moyenne ainsi calculée devrait de rapprocher de $E(Y_n)$. Par ce qui précède (et qui découle surtout du théorème de transfert), cette espérance est égale à l'intégrale J_n. Ce code permet donc d'obtenir une *estimation* de J_n.
C'est la méthode de calcul numérique d'intégrale sous `SciLab` présentée en TP sous le nom de *Méthode de Monte-Carlo*.

Remarque. Dans le cours d'ECE, la loi faible des grands nombres nécessite de savoir que la variable échantillonnée admet une variance (la preuve repose alors sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Le résultat reste vrai avec seulement l'existence de l'espérance, mais la preuve n'est plus accessible avec les outils d'ECE.
Ici, on sait que la variable Y_n admet une espérance mais on ne sait *a priori* pas qu'elle admet une variance (ce qui est aussi le cas). Si l'énoncé comporte donc une part d'ambiguïté, on n'attendait sûrement pas qu'elle soit observée par les candidat.e.s.

Exercice 3

Partie A

(1) Avec les notations du texte, il est clair que les deux derniers lancers doivent être des *Pile* et qu'il ne peut y avoir de succession de deux *Pile* consécutifs avant. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(X=2) &= P_1 \cap P_2\\ (X=3) &= F_1 \cap P_2 \cap P_3\\ (X=4) &= (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\end{aligned}$$

Par indépendance des évènements (P_k) et (F_k) et incompatibilité des deux alternatives dans $(X=4)$, on a

$$\begin{aligned} a_2 &= P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ a_3 &= P(F_1)P(P_2)(P_3) = \frac{1}{8} \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(2) On peut réécrire l'évènement U_n à l'aide de la variable X. Si, au cours des n premiers lancers, on a au moins une fois deux *Pile* consécutifs, alors ces deux *Pile* consécutifs arrivent pour la première fois au deuxième lancer, ou bien au troisième, ou bien à n'importe quel moment avant le $n-$ième de sorte qu'on peut écrire

$$U_n = \bigcup_{k=2}^{n}[X=k].$$

Comme X est une variable aléatoire, les évènements $(X=2), \ldots, (X=n)$ sont incompatibles et par conséquent

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{n}(X=k)\right) = \sum_{k=2}^{n} P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

(3) (a) En étudiant le programme à trous, on constate que la variable `tirs` compte le nombre de lancers, c'est donc la valeur que *renvoie* notre fonction. La variable `pile` est le nombre de *Pile* consécutifs, on veut atteindre 2. Si on a un *Face*, cette variable est remise à zéro.

```
function y=simulX()
        tirs=0 //nombre de tirages
        pile=0 //nombre de pile "consécutifs"
        while pile < 2 //tant qu'on a pas 2 pile consécutifs
                if rand( ) < 1/2 then pile=pile+1 //une pile de plus si
pile
                else
                        pile=0 // sinon, face et on retombe à 0
                end
                tirs=tirs +1 // un tirage de plus
        end
        y=tirs
endfunction
```

(b) Pour ce type de programme classique, on utilise une boucle `for`.

```
function s=moyenne(n)
        X=zeros(1,n)
        for i=1:n
                X(i)=simulX()
        end
        s=mean(X)
endfunction
```

(c) La moyenne empirique est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance. On peut donc conjecturer que plus n est grand, plus la valeur renvoyée par `moyenne(n)` sera proche de $E(X)$. On lit une oscillation de plus en plus proche de 6. On conjecture donc que X admet une espérance et que $E(X) = 6$.

On en profite pour joindre, par plaisir et à caractère informatif, les commandes qui ont pu permettre l'obtention du graphique.

```
Y=zeros(1,200)
for k=1:200
    Y(k) = moyenne(k)
end
plot([1:200],Y)
```

Partie B

(4) (a) L'évènement U_{n+1} signifie qu'on a obtenu 2 *Pile* consécutifs à un moment au cours des $n+1$ premiers lancers. On a pu l'obtenir au cours des n premiers lancers (ce qui correspond à U_n) ou grâce à l'ajout du $(n+1)-$ième lancer, c'est à dire avec les deux derniers lancers $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$. En d'autres termes,

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}.$$

Par la formule du crible,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

(b) L'évènement B_{n+1} nous donne une information très précise (*Pile* et *Pile*) sur ce qui s'est passé lors des lancers numérotés n et $n+1$. Comme U_n concerne ce qui a pu se passer lors des n premiers lancers, on a naturellement l'idée de différencier selon ce qu'on a obtenu au lancer $n-1$: *Pile* ou *Face*. En observant que $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ est un s.c.e, on a

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}).$$

On voit alors

- D'une part, $B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}$ et comme $P_n \cap P_{n-1} \subset U_n$ (si on a *Pile* aux lancers $n-1$ et n, on a bien eu deux *Pile* consécutifs au cours des n premiers lancers), on a

$$U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}.$$

- D'autre part, ayant obtenu *Face* au lancer $n-1$, on ne peut avoir eu deux *Pile* consécutifs qu'au cours des $n-2$ premiers lancers, et donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Au final, on a bien,

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}).$$

(c) Les lancers étant indépendants, U_{n-2} est indépendant de F_{n-1}, P_n et P_{n+1}. Il suit que

$$\begin{aligned} P\left(U_n \cap B_{n+1}\right) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) + P(P_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par la Question (4*a*), on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(P_n \cap P_{n+1}) - P\left(U_n \cap B_{n+1}\right) \\ &= u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

(5) Par la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$$

car u_n est une probabilité et donc comprise entre 0 et 1 (et donc $1 - u_{n-2} \geq 0$). Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Étant donc majorée par 1, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite ℓ, également comprise entre 0 et 1. Le passage à la limite dans la relation

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

donne

$$0 = \ell - \ell = \frac{1}{8}(1 - \ell) \Longleftrightarrow \ell = 1.$$

(6) La variable X prend la valeur -1 si on obtient jamais deux *Pile* consécutifs. On peut alors écrire

$$P(X = -1) = P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right).$$

La suite (U_n) étant croissante au sens de l'inclusion (si on a deux *Pile* consécutifs au cours des n premiers lancers, on les a *a fortiori* au cours des $(n+1)$ premiers lancers), le théorème de la limite monotone nous donne

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n) = 1$$

et donc

$$P(X = -1) = 1 - 1 = 0.$$

Partie C : Étude de l'espérance de X

Dans cette partie, on pose, pour tout entier $n \geq 2$,

$$v_n = 1 - u_n, \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} kP(X = k).$$

(7) Soit $n \geq 4$. Par définition,

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8} v_{n-2}. \end{aligned}$$

(8) Il est clair que, si on a deux *Pile* consécutifs au cours des $n+1$ premiers lancers, on a pu les avoir au cours des n premiers lancers ou bien (et c'est incompatible) exactement pour la première fois avec le $(n+1)-$ième lancer. C'est à dire $(X = n+1) \cup U_n = U_{n+1}$ et que cette réunion est disjointe. Ainsi,

$$P(X = n+1) + P(U_n) = P(U_{n+1}).$$

D'après la Question $(4c)$ et ce qui précède, on a donc

$$P(X = n+1) = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8} v_{n-2} = v_n - v_{n+1}.$$

(9) On procède, comme demandé, par récurrence. Il faut au préalable calculer v_2, v_3 et v_4 à partir de u_2, u_3 et u_4. D'après ce qui précède,

$$u_2 = P(U_2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad u_3 = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8},$$

$$u_4 = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$$

et donc

$$v_2 = 1 - u_2 = \frac{3}{4}, \qquad v_3 = 1 - u_3 = \frac{5}{8}, \qquad v_4 = \frac{1}{2}.$$

- initialisation. Pour $n=2$, on a d'une part
$$S_2 = 2P(X=2) = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
et d'autre part
$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$
et l'initialisation est vérifiée.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \geq 2$, on ait
$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$
Remarquons que, d'après la Question (7),
$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2} \Longleftrightarrow 8v_n = v_{n-2} + 8v_{n+1}$$
ou encore
$$8v_{n+2} = v_n + 8v_{n+3}.$$
Il suit que
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)P(X=n+1) \\ &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)P(X=n+1) && \text{(par HR)} \\ &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) && \text{(par la Question(8))} \\ &= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= 6 - v_{n+1} - 8v_{n+3} - v_n + v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= -v_{n+1} - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la relation au rang $(n+1)$ et termine la récurrence.

(10) Comme déjà mentionné, la suite (v_n) est à termes positifs (car $1-u_n \geq 0$) donc la relation précédente donne $S_n \leq 6$ et la suite (S_n) est bien majorée.Il est également clair que (S_n) est croissante :c'est une suite de sommes partielles de termes positifs
$$S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X=n+1) \geq 0.$$

(11) La suite (S_n) est croissante et majorée: elle converge par application du théorème de convergence monotone. La convergence de cette suite revient à la convergence de la série de terme général $kP(X=k)$, c'est à dire à l'existence de l'espérance de X.

(12) (a) La relation obtenue à la Question (9) s'écrit aussi
$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n.$$
or, comme (v_n) converge vers 0 (car (u_n) converge vers 1) et que la suite (S_n) est convergente, il suit que (nv_n) converge vers une certaine limite que l'on note λ positif (ou nul) car la suite est à termes positifs.

(b) Si λ est non nul, alors $nv_n \longrightarrow \lambda$, ce qui s'écrit aussi
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}.$$
Comme la série $\sum(\lambda/n)$ diverge (multiple de la série harmonique), le critère d'équivalence 'qui s'applique ici car les termes généraux comparés sont tous deux positifs) implique alors que la série $\sum v_n$ diverge également.
Or, d'après la Question (7)
$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} v_k &= \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = 8\sum_{k=4}^{n-2}(v_k - v_{k+1}) \\ &= 8(v_4 - v_{n-1}) && \text{(par télescopage)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8v_4 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire! On peut donc conclure que $\lambda = 0$, ou que nv_n tend vers 0.

(c) Ainsi,

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 6$$

et on retrouve le résultat conjecturé dans la Partie A:

$$E(X) = 6.$$

Remarque. On mentionne à titre indicatif, pour des étudiant.e.s qui souhaiteraient poursuivre la réflexion sur cet exercice que ce dernier pourrait avoir été inspiré du sujet **HEC 2004** sur le *paradoxe de Penney*.