Exercice 1

Partie 1

1a. $N : x \mapsto x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$

sur $[0,1[$ on a $1-x>0$, donc N est $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.

1b. Concavité du ln :

Soit $f : x \mapsto \ln(1-x)$

Alors $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$, et $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$

d'où f est concave sur $[0,1[$; donc en-dessous de ses tangentes.

Or la tgte en 0 a pour équat°

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x.$$

On conclut : $\boxed{\forall x \in [0,1[\,,\ \ln(1-x) \leq -x}$

Par stricte concavité ($f''<0$) on a aussi que le cas d'égalité est atteint en $x=0$ uniq^t

On peut aussi étudier $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$ sur $[0,1[$

1c. $\forall x \in [0,1[$:

$$N'(x) = 2x - 2 - 2\left((-1)\ln(1-x) + (1-x)\left(-\frac{1}{1-x}\right)\right)$$
$$= 2x - \cancel{2} + 2\ln(1-x) + \cancel{2}$$

$$\boxed{N'(x) = 2\left(x + \ln(1-x)\right) \leq 0 \text{ d'après 1b.}}$$

1d. On dresse alors le tableau de variation de N :

x	0		1
$N(x)$	0	$\searrow$	$\|$

$(N(0)=0)$

et on voit bien : $\forall x \in [0,1[\ ,\ N(x) \leq 0$.

2a. * f est continue sur $]0,1[$ par composée de fct° continues
(le dénom. x^2 ne s'annule pas ; $1-x>0$)

* On étudie $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-2)\times \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} \underset{\text{d'après }(*)}{=} -2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$: f est continue en 0

Final° : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,1[\ !}$

2b. On étudie le tx d'accroissement :

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2} - 1}{x}$$

$$= \frac{-2(x+\ln(1-x))}{x^3} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-2(x+\ln(1-x)) - x^2}{x^3}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-2\left(x+\ln(1-x)+x^2/2\right)}{x^3}$$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} (-2) \times \frac{x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

$= (-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

limite (**)

Donc : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{, et } f'(0) = \frac{2}{3}}$

2c. Sur $]0,1[$, f est dérivable comme composée de fct° dérivables.

$$f'(x) = \frac{-2\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)\times x^2 - (-2)\left(x + \ln(1-x)\right)\times 2x}{x^4}$$ (on ne panique pas !)

$$= \frac{-2\times\frac{-x}{1-x}\times x^2 + 4x\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{2x^3}{1-x}}{x^4} + \frac{4\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2}{x^3(1-x)} + \frac{4\left(x+\ln(1-x)\right)(1-x)}{x^3(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x(1-x) + 4(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 4x^2 + 4(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x + 4(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)} = \frac{-2N(x)}{x^3(1-x)}$$

ouf !

2d. Sur $]0,1[$:

$N(x) \leq 0$ (1c.)

$x^3 > 0$

$1-x > 0$

d'où $f'(x) \geq 0$

f est croissante sur $]0,1[$.

x	0		1
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ||

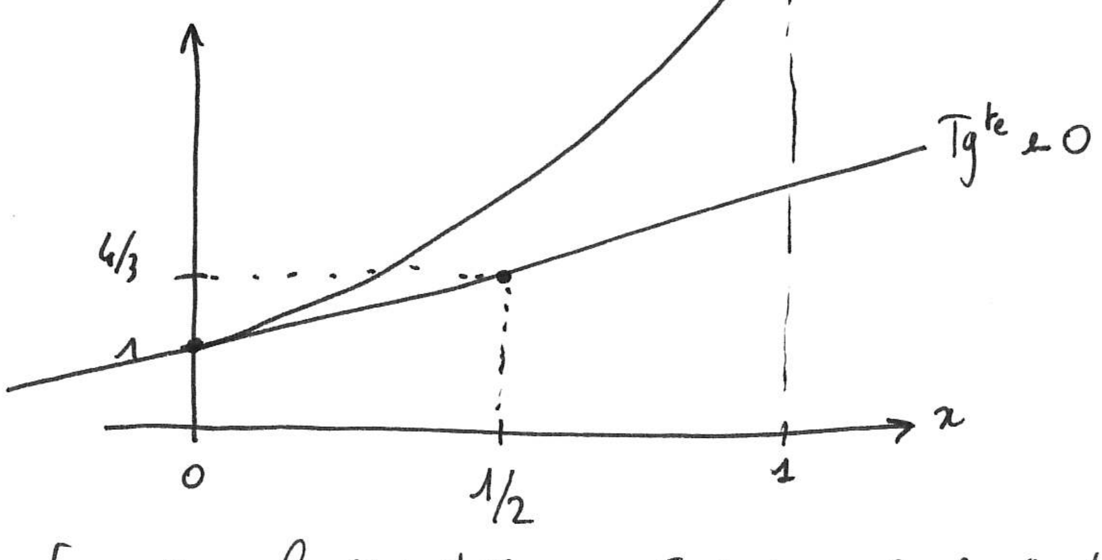
et on a $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x+\overbrace{\ln(1-x)}^{\to -\infty \text{ pour } x\to 1})}{x^2} = +\infty$$

2e. Avec le tableau, les limites, et la tangente en 0 d'équation

$$y = f'(0)(x-0)+f(0) = \frac{2}{3}x+1 \quad (2b)$$

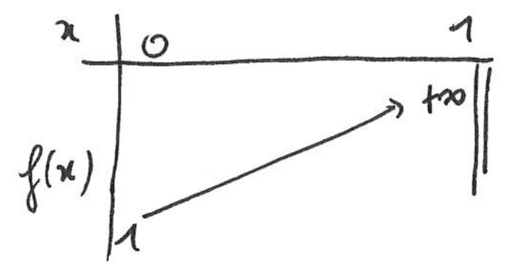
on peut tracer :



[on ignore la convexité mais c'est le tracé le plus "naturel"]

Partie II

3. On rappelle le tableau de variat° de f



Sur $]0,1[$, $N(x) < 0$ ~~(il faudrait pour cela pousser un peu l'étude de fct° ds AB)~~

(car $N'(x) < 0$: décroissance stricte)

d'où : f' 0 : f est strict^t ↗ sur $[0,1[$

Ainsi elle réalise une biject° de $[0,1[$ vers $[1,+\infty[$.

Par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1,+\infty[$; d'où l'existence d'un unique $u_n \in [0,1[$ tq $f(u_n) = n$

u_1 est l'unique solut° de $f(x) = 1$.

On remarque que $f(0) = 1$: 0 est une solut°.

Par unicité : $\boxed{u_1 = 0}$

4. $\forall x \in [0,1[$, $f(x) \geq 1$ donc $f(x) \geq 1 \underbrace{>}_{} x$: ($x \in [0,1[$)

$\boxed{\text{Il n'existe donc aucun } x \text{ tel que } f(x) = x}$

Partie III

5. $\dfrac{1}{1-t} - 1 - t - t^2$

$= \dfrac{1 + (1-t)(-1-t-t^2)}{1-t}$

$= \dfrac{1 - 1 - t - t^2 + t + t^2 + t^3}{1-t}$

$= \boxed{\dfrac{t^3}{1-t}}$

6. l'égalité : $\dfrac{1}{1-t} - 1 - t - t^2 = \dfrac{t^3}{1-t}$ est vraie sur $[0,1[\supset [0,x[$

On peut donc intégrer (des fonct° continues).

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x (1+t+t^2)dt = \int_0^x \frac{t^3}{1-t}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \int_0^x \frac{t^3}{1-t}dt}$$

7. * $\forall t \in [0,x[$, $0 < t < 1$ donc $\dfrac{t^3}{1-t} \geq 0$

d'où $\displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1-t}dt \geq 0$

De plus : $t \leq x \Rightarrow 1-t \geq 1-x \Rightarrow \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$ par ↓ de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \dfrac{t^3}{1-t} \leq \dfrac{t^3}{1-x}$ $(t^3 \geq 0)$

En intégrant sur $[0, x[$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{t^3}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^3}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^3\,dt = \frac{x^4}{4(1-x)}$$

$$\boxed{\text{On a bien } 0 \leq I(x) \leq \frac{x^4}{4(1-x)}}$$

8. Avec la q.6 on a bien :

$$-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = I(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{3} - I(x)$$

d'où $$\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = -\frac{1}{3} - \frac{I(x)}{x^3}$$

Il faut donc calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{I(x)}{x^3}$.

Avec l'encadrement de 7°)

$$\forall x \in [0, 1[\qquad 0 \leq \frac{I(x)}{x^3} \leq \underbrace{\frac{x}{4(1-x)}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

d'où par théorème des gendarmes : $\underline{\lim\limits_{x \to 0} \frac{I(x)}{x^3} = 0}$

puis $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = -\frac{1}{3}}$$

9. On écrit de même :

$$\ln(1+x) + x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - I(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{x}{2}}_{\to -1/2} - \frac{I(x)}{x^2}$$

avec $\frac{I(x)}{x^2} = x \times \frac{I(x)}{x^3}$ on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{I(x)}{x^2} = 0$

et on conclut aussi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

Exercice 2

1a. Il s'agit donc de modéliser une loi géométrique !

```
def simulZ():          <- imports usuels
    k=1
    while rd.random()>1/2:    # "échec", obtenir Face avec
                              #  proba 1/2
        k=k+1
    return k.
```

1b. On suit le déroulement de l'expérience !

```
def simulX():
    z= simulZ()
    x= rd.randint (1,k+1)   # U([[1,k]])
```

2. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $1/k \leq 1$

donc $0 \leq \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$

$\sum (1/2)^k$ cv (géométrique, de raison $1/2 \in]-1,1[$)

donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ cv}}$$

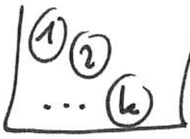
3a. Z est le temps d'attente du 1° Pile (proba 1/2) ds une succession de lancers indépendants :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$$

3b. À l'issue de cette expérience il peut apparaître n'importe quelle boule (k), $k \in \mathbb{N}^*$.

Plus précisément :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc Z peut valoir k ;

et dans ce cas on pioche ds  donc on peut avoir

$X = k$. Il est clair que X ne peut pas prendre de valeur hors de $\mathbb{N}^*$...

Ainsi : $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

3c. Sachant $Z = k$, chaque boule (1), (2) ... (k) apparaît de manière équiprobable ; d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall i \in [\![1, k]\!], \quad P_{(Z=k)}(X=i) = \frac{1}{k}.$$

De plus d'après l'expérience on ne peut pas avoir $X > Z$; d'où

$$i > k \implies P_{(Z=k)}(X=i) = 0$$

Finalt :
$$\boxed{\forall (k,i) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad P_{(Z=k)}(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } i \in [\![1, k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}}$$

3d. On applique les probas totales, avec le SCE $((Z=k))_{k\in\mathbb{N}^*}$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(Z=k)}(X=i) \times P(Z=k)$$

$$= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

car $P(Z=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (géométrique)

car pour $k<i$, $P_{(Z=k)}(X=i)=0$

3e. On effectue l'interversion demandée :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{indép. de } i} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cancel{k} \times \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right)$$

$$= \frac{1/2}{1-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1}$$

4a. On a

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $i\,P(X=i) = i \sum_{k\geq i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Si $k \geq i$, $1/k \leq 1/i$. $\sum_{k\geq i} (1/2)^k$ cv (géométrique) donc on peut écrire

$$i\,P(X=i) = i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \cancel{i}\times\frac{1}{\cancel{i}}\sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{i\,P(X=i) \leq \sum_{k=i}^{+\infty}(1/2)^k = \frac{(1/2)^i}{1-1/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}$$

4b. On s'intéresse à la cv absolue ($\Leftrightarrow$ cv simple, les termes sont positifs) de $\sum_i i\,P(X=i)$

On : $0 \leq i\,P(X=i) \leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ d'après 4a.

et $\sum i(1/2)^{i-1}$ cv (série géo dérivée, $1/2 \in]-1,1[$)

d'où $\sum i\,P(X=i)$ cv absolument, et **X admet bien une espérance**

4c. On a $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\cancel{k}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\cancel{k}(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{par chg}^t \text{ d'indice}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \underbrace{1}_{\text{terme } k=1.}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(4-1) \quad \Rightarrow \text{On a bien } \boxed{E(X) = \frac{3}{2}}$$

5a D'après le ~~théorème~~ théorème de transfert il s'agit d'examiner la cv (absolue) de $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i^p P(X=i)$.

On : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq i^p P(X=i) \leq i^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ d'après 4a.

De plus : $i^2 \times i^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = i^{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$ par croiss. comp.

$$\text{d'où } i^2 . i^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = o(1) \quad (i\to+\infty)$$

$$i^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = o\left(\frac{1}{i^2}\right)$$

et par comparaison à $\sum \frac{1}{i^2}$ qui cv (Riemann) on a :

$$\sum i^{p-1}(1/2)^i \text{ converge}$$

Toujours par comparaison on conclut que $\sum i^p P(X=i)$ cv
$\Rightarrow$ X admet bien un moment d'ordre p.

5b

X admet une variance d'après 5a (pour $p=2$)

Z —— (loi géométrique)

$\Rightarrow (X,Z)$ admet une covariance.

5c. On a $E(XZ) = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}^{*2}} ik\, P\left((X=i)\cap(Z=k)\right)$

$$= \sum_{i,k} ik\, P_{(Z=k)}(X=i) \times P(Z=k)$$

(et cette espérance existe car $Cov(Z,X)$ existe !)

$$= \sum_{i\leq k} ik \times \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{(cf plus haut)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} i\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$ d'après la sommation proposée en 3e.

On peut alors sommer :

$$E(XZ) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$n=k+1$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{(1-1/2)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(XZ) = 4}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(X,Z) = E(XZ) - E(X)E(Z)$$

$$= 4 - \frac{3}{2} \times 2 \qquad (Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2) \text{ donc } E(Z) = 2)$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Z) = 1}$$

Cette covariance est positive, ce qui est raisonnable : si Z augmente, comme on tire ds une urne contenant les boules 1 … Z, on aura en moyenne une boule plus élevée.

Exercice 3

Partie 1

1. X_i compte le nb de "succès" (obtenir la boule (i) ; avec proba $\frac{1}{n}$ car les boules sont indiscernables) ds 1 successᵒ de k tirages indépendants (car il y a remise)

Ainsi, $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)}$

On a alors $E(X_i) = \frac{k}{n}$; $V(X_i) = k \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$V(X_i) = \frac{k(n-1)}{n^2}$$

2. "Non car si on tire (i) on ne tire pas (j)" ....

et en formalisant :

Sur k tirages on a clairement

$$P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = k) \cap \dots \cap (X_n = k)\right) = 0$$

mais $\forall i$, $P(X_i = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^k \neq 0$

$$\text{d'où } P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = k)\right) \neq \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k)$$

$\Rightarrow$ les X_i ne sont pas indépendants

3. a. $X_i + X_j$ est aussi une binomiale, où cette fois le succès est : " tirer (i) ou (j) " avec proba $\frac{2}{n}$.

Ainsi : $\boxed{X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$

et $V(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n} \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \underline{\underline{\frac{2k(n-2)}{n^2}}}$

b. Cette Cov existe (les variables prennent un nb fini de valeurs !)

$$\text{et } \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\Big(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2k(n-2)}{n^2} - k\,\frac{n-1}{n^2} - k\,\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{k}{2n^2}\Big(2(n-2) - 2(n-1)\Big)$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

Partie II

4. Si $k \leq n$, en k tirages on peut tirer au + k boules distinctes : alors $Z_k(\Omega) = [\![1, k]\!]$. Par contre si $k > n$, on ne peut pas dépasser les n boules distinctes ! Ds ce cas $X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

En 1 tirage, on obtient 1 valeur distincte !

Ainsi, $\boxed{Z_1 \text{ est constante égale à } 1}$

En 2 tirages on obtient 1 valeur distincte ou deux

$\Rightarrow Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$

On a $Z_2 = 1$ ssi on tire 2 fois la même boule. Une manière facile de s'en sortir est de voir que $P(Z_2 = 1)$ est la proba que la

Seconde boule tirée soit identique à la première : ceci arrive avec proba $1/n$.

$\Rightarrow$ $\boxed{P(Z_2=1)=1/n}$

et donc $\boxed{P(Z_2=2)=1-1/n}$

On a $\underline{\underline{E(Z_1)=1}}$; et $E(Z_2)=\frac{1}{n}+2\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\underline{\underline{2-\frac{1}{n}}}$

5. a. Avec le m̄ raisonn^t que $Z_2=1$:

$Z_k=1$ ssi les $(k-1)$ tirages suivant le premier ont donné une boule identique à la première.

Par indép. des tirages : $\boxed{P(Z_k=1)=\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}}$

On peut aussi raisonner par équiprobabilité :
il y a n^k tirages possibles (n choix à chaque tirage)
et parmi ceux-ci, n tirages où la boule est tj la même :

1 1 ... 1 , 2 2 ... 2 ; ... ; n n ... n.

Par équiproba $\underline{P(Z_k=1)=\frac{n}{n^k}=\frac{1}{n^{k-1}}}$

5b. . Si $k>n$, on ne peut pas avoir $Z_k=k$ (plus de boules distincts que de boules ds l'urne !)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{si } k>n,\ P(Z_k=k)=0}$

Si $k \leq n$, on a $Z_k = k$ ssi les k tirages ont donné des boules distincts.

Donc
* la 1° boule tirée est quelconque
* la 2° ——— est différente de la 1ère
* la 3° ——————— des deux premières
⋮
* la k-ième ——————— des $(k-1)$ premières.

Par proba composée :

$$P(Z_k = k) = 1 \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n}$$

$$\boxed{P(Z_k = k) = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}}}$$

5c. Celle-ci est technique!

Par équiprobabilité on est ramené à dénombrer les "tirages à 2 boules" (i)(i)(j)(i)(j)... avec $i \neq j$

$\longleftrightarrow$ k tirages.

On doit pour cela : * choisir les 2 boules : $\binom{n}{2}$ choix

* construire le tirage : à chaque tirage on choisit (i) ou (j) donc 2^k choix .....

* mais ⚠ on ne doit pas compter les tirages (i)(i)..(i) et (j)(j)...(j) (pour ceux-là $Z_k = 1$)

donc finalt $2^k - 2$ choix

On trouve donc

$\binom{n}{2}(2^k-2)$ tirages donnant $Z_k = 2$

d'où $\boxed{P(Z_k=2) = \dfrac{\binom{n}{k}(2^k-2)}{n^k}}$

(NB : si $k=1$, on ne peut pas tirer 2 boules distincts en un tirage : $P(Z_1=2)=0$. La formule encadrée est encore valable)

6. Intuitivt : si on a ℓ boules distincts au $(k+1)$-ème tirage alors

* soit on en avait déjà ℓ distincts au k-ième, et on a tiré une déjà obtenue
* soit on n'avait que $\ell-1$ distincts, et on a tiré une qu'on n'avait pas encore.

On réalise donc une FPT sur le SCE $\left((Z_k=i)\right)_{i\in Z_k(\Omega)}$ $Z_k(\Omega)\subset [\![1,n]\!]$

$\forall \ell \in [\![2,n]\!]$,

$$P(Z_{k+1}=\ell) = \sum_{i=1}^{n} P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1}=\ell)\times P(Z_k=i)$$

La proba conditionnelle $P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1}=\ell)$

* est nulle si $i>\ell$ (on "perdrait" des boules)
* —— si $i\leq \ell-2$ (on gagnerait + de deux boules en un tirage)

* $P_{(Z_k=\ell-1)}(Z_k=\ell) = \dfrac{n-(\ell-1)}{n}$ (proba de piocher une boule qui n'est pas parmi les $\ell-1$ déjà obtenues)
* $P_{(Z_k=\ell)}(Z_{k+1}=\ell) = \dfrac{\ell}{n}$ (proba de piocher 1 boule parmi les ℓ déjà obtenues).

En injectant ds la somme :

$$\boxed{P(Z_{k+1}=\ell)=\frac{n-\ell+1}{n}\,P(Z_k=\ell-1)+\frac{\ell}{n}\,P(Z_k=\quad)}$$

6b. Pour $\ell=1$: si $k\geq 1$, $Z_k=0$ est impossible

la formule s'écrit $P(Z_{k+1}=1)=\cancel{P(Z_k=0)}+\frac{1}{n}\,P(Z_k=1)$

$$P(Z_{k+1}=1)=\frac{1}{n}\,P(Z_k=1)$$

<u>vraie</u> car le $1/n$ est la proba de piocher la seule boule qu'on ait déjà obtenue (cas $Z_k=1$)

6c. Pour le calcul de E, on somme de 1 à n car $Z_k(\Omega)\subset [\![1,n]\!]$.

$$E(Z_{k+1})=\sum_{\ell=1}^{n}\ell.\,P(Z_{k+1}=\ell)$$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\ell.\frac{\ell}{n}\,P(Z_k=\ell)+\frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\,P(Z_k=\ell-1)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2\,P(Z_k=\ell)+\sum_{\ell=1}^{n}\ell(n-\ell+1)\,P(Z_k=\ell-1)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\,P(Z_k=j)+\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)\,P(Z_k=j)\right)$$

$j=\ell-1$ ds la 2° somme

$$=\frac{1}{n}\left(n^2P(Z_k=n)+\underbrace{0}_{\substack{\text{terme } j=0 \text{ de}\\ \text{la } 2^{\text{ème}}\ \Sigma\ !\\ P(Z_k=0)=0}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\left(j^2+(j+1)(n-j)\right)P(Z_k=j)}_{\text{fusion !}}\right)$$

$$E(Z_{k+1}) = n P(Z_k=n) + \sum_{j=1}^{n-1} \left((n-1)j+n\right) P(Z_k=j)$$

$$= n P(Z_k=n) + \frac{n-1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n-1} j\, P(Z_k=j)\right] + \left(\sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k=j)\right)$$

$$= \frac{n-1}{n}\left[E(Z_k) - n P(Z_k=n)\right] + n P(Z_k=n) + \left(1 - P(Z_k=n)\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} E(Z_k) - \cancel{(n-1) P(Z_k=n)} + \cancel{n P(Z_k=n)} + 1 - \cancel{P(Z_k=n)}$$

$$\boxed{E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} E(Z_k) + 1} \qquad (\text{ouf !})$$

7a. la relat° de 6c donne, avec $E(Z_k) = v_k + n$:

$$v_{k+1} + n = \frac{n-1}{n}(v_k + n) + 1$$

$$v_{k+1} + n = \frac{n-1}{n} v_k + (n-1) + 1$$

$$v_{k+1} + \cancel{n} = \frac{n-1}{n} v_k + \cancel{n} \quad \Rightarrow \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} = \frac{n-1}{n} v_k}$$

7b. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \times v_1 \quad . \text{ Or } v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, v_k = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}$$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_k) = v_k + n = n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = \underline{\underline{n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}}$

Partie III

8. On tire k boules (par randint) et on compte le nombre de "1"

```
def tirage_X1(k):
    c=0
    for i in range(k):
        if rd.randint(1,5)==1:    ( tirage de U([[1,4]]) )
            c=c+1

    return c.
```

9. La liste L contient initial^t [0,0,0,0]
puis la i-ème composante compte les apparit° de la boule (i).
A chaque tirage d'1 boule on incrémente son compteur...
en n'oubliant pas que les indices commencent à 0!

```
def tirage_X(k):
    L= np.zeros(4)
    for i in range(k):
        boule = rd.randint(1,5)
        L[boule-1] = L[boule-1]+1
    return L
```

10. Si on obtient [2, 0, 3, 5] alors, sur 10 tirages :

on a tiré 2 fois la boule 1

0 ———— 2

3 ———— 3

5 ———— 4.

Z_{10} vaut alors le nb de boules distincts obtenues, donc $\underline{\underline{3}}$ (les boules 1, 3, 4).

On voit donc que Z_k est le nombre de composants non nulles de la liste renvoyée par tirage_X.

On peut alors procéder ainsi :

```
def tirage_Z(k):
    L = tirage_X(k)
    z = 0
    for x in L:
        if x > 0:
            z = z+1
    return z.
```

z compte le nb de composants "x" > 0.

11. Avec ces instruct° ~~, liste_Z contient le~~ on effectue 10000 tirages de Z_4 et on renvoie une liste dont le 1° terme compte le nb de tirages où $Z_4 = 1$

2° ———— ———— ———— ———— $= 2$

etc.

En divisant par 10000 : la liste renvoyée contient les fréquences d'apparit° des différentes valeurs possibles de Z_4 sur les 10000 exp.

Ces fréquences sont des approximations de probabilités :
La liste obtenue donne alors des valeurs approchées de

$$\left[P(Z_4 = 1) \quad P(Z_4 = 2) \quad P(Z_4 = 3) \quad P(Z_4 = 4) \right]$$

On $P(Z_4 = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{4-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ ($n = 4$ boules)

$\Rightarrow$ la 1° composante est bien une approximat° de $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

12. D'après 5a, $P(Z_k = 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

Comme il n'y a que 4 boules, on ne peut pas tirer plus de 5 boules distinctes !

Ainsi : $\cancel{\forall k \in \mathbb{N}^*}$, $P(Z_k \geq 5) = 0$
$\forall k \geq 4$

13. C'est la question 5c :

$$P(Z_k = 2) = \binom{4}{2} \frac{2^k - 2}{4^k} = \underline{\underline{6 \times \frac{2^k - 2}{4^k}}}$$

14 a. Il y a 4 boules ; donc on a obtenu ≤ 3 boules distinctes en $k (\geq 4)$ tirages ssi il existe une boule qui n'a jamais été tirée.
(au moins)

D'où $\boxed{(Z_k \leq 3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

11b. A_1 est l'évt : la boule 1 n'est jamais sortie en k tirages (11)

$$\Rightarrow \boxed{P(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$ (proba 3/4 de tirer 1 autre boule que 1)

$A_1 \cap A_2$ est l'évt : les boules 1 et 2 ne sont — — —

$$\Rightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$ (proba 1/2 de tirer 1 autre boule que 1 et 2, avec 4 boules)

De même : $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$

et enfin : $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0}$

(en $k \geq 1$ tirages, on ne peut pas tirer ni 1, ni 2, ni 3, ni 4 !!

11c. Il vient, avec la formule admise :

$$\boxed{P(Z_k \leq 3) = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^k - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

Or pour $k \geq 4$, $Z_k(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

d'où $P(Z_k \leq 3) = P(Z_k = 1) + P(Z_k = 2) + P(Z_k = 3)$

$$\Rightarrow \boxed{P(Z_k = 3) = P(Z_k \leq 3) - P(Z_k = 1) - P(Z_k = 2) = \cdots}$$

puis $\boxed{P(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leq 3)}$