ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé n°2

19/10/2024

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On admet les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3} = -\frac{1}{3} \quad (**)$$

Partie 1 : Études de deux fonctions

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$\mathrm{N}(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$$

   (a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$; et que l'égalité a lieu seulement pour $x = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\mathrm{N}'(x) \leqslant 0$.
   (d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \frac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2} \ \text{ si } \ 0 < x < 1 \ \ ; \ \text{ et } f(0) = 1$$

   (a) Montrer que f est continue sur $[0,1[$.
   On utilisera une des limites admises.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = \dfrac{2}{3}$.
   On utilisera une des limites admises.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = -2\frac{\mathrm{N}(x)}{x^3(1-x)}$$

   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.
   (e) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.

Partie 2 : Études de deux équations

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.

4. L'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

Partie 3 : Preuve des deux limites admises

5. Soit $t \in [0,1[$. Mettre au même dénominateur l'expression $\dfrac{1}{1-t} - 1 - t - t^2$.

6. En déduire : $\forall x \in [0,1[,\ -\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

7. On pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer : $0 \leqslant \mathrm{I}(x) \leqslant \dfrac{x^4}{4(1-x)}$.

8. En remarquant que $\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{x^3}{3} - \mathrm{I}(x)$, démontrer la limite $(**)$; par un argument similaire démontrer la limite $(*)$.

Exercice 2

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir « Pile » et celle d'obtenir « Face » sont toutes deux égales à $\dfrac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier « Pile » .
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur $k \in \mathbb{N}^*$, on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \ldots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. (a) Proposer une fonction Python `SimulZ` qui renvoie la valeur prise par Z lors de cette expérience.
   On n'utilisera que le générateur aléatoire `rd.random()`.
   (b) En déduire une fonction Python `SimulX` qui renvoie la valeur prise par X lors de cette expérience.

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

3. (a) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) Préciser, en justifiant soigneusement, l'ensemble $\mathrm{X}(\Omega)$.
   (c) Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[\mathrm{Z}=k]}(\mathrm{X}=i)$.
   (d) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathrm{X}=i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   (e) On admet dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=i) = 1$.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=i) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$.
   (b) En déduire que X possède une espérance.
   (c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 3e, que

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{2}$$

5. (a) Utiliser le résultat de la question 4a pour montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, X a un moment d'ordre p.
   (b) Montrer que le couple (X,Z) admet une covariance.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{XZ}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} i\left(\frac{1}{2}\right)^k$. En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Z})$. Son signe vous paraît-il cohérent ?

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne U contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne U.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes?
3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Justifier que $Z_k(\Omega) = \begin{cases} [\![1,k]\!] & \text{si} \quad k \leqslant n \\ [\![1,n]\!] & \text{si} \quad k > n \end{cases}$.
   Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2 ; en déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.
5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$.
   (b) Montrer : $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_k = k) = \dfrac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^{k-1}}$. Que vaut $\mathbb{P}(Z_k = k)$ si $k > n$?
   (c) Justifier : $\mathbb{P}(Z_k = 2) = \dbinom{n}{2}\dfrac{2^k - 2}{n^k}$.
6. (a) Montrer, pour tout $\ell \in [\![2,n]\!]$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathbb{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   (b) Cette formule est-elle encore vraie pour $\ell = 1$?
   (c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k) + 1$.
7. (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

   NB : ça ne vous rappelle pas une histoire d'ascenseurs ?

Partie III : Python

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne U contient 4 boules numérotées de 1 à 4.

8. Écrire une fonction Python d'en-tête `tirage_X1(k)` qui, pour un entier $k \geqslant 1$ passé en argument, simule les k tirages et renvoie la valeur de X_1 obtenue.
   NB : sans utiliser le résultat de la question 1.
9. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule, pour un entier $k \geqslant 1$ passé en argument, les k tirages et renvoie la liste $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ obtenue.

```
def tirage_X(k)
    L = np.zeros(...) # contient les compteurs de boule 1, boule 2, etc.
    for ...
        boule =  ...
        L[...] = L[...] + 1
    return ...
```

10. Si l'appel `tirage_X(10)` renvoie la liste `[2,0,3,5]`, que vaut Z_{10} ? De manière générale, comment détermine-t-on Z_k à partir de la liste $[X_1, X_2, X_3, X_4]$?
Compléter la fonction `tirage_Z(k)` *qui appelle la fonction précédente*, et qui, pour un entier $k \geqslant 1$ passé en argument, simule les k tirages et renvoie la valeur de Z_k obtenue.

```
def tirage_Z(k):
    L = .... # contient un tirage de la liste [X1,X2,X3,X4]
    z = 0
    for ...
        if ...
            z = z + 1
    return z
```

11. On utilise cette dernière fonction dans la liste d'instructions suivante :

```
liste_Z = np.zeros(4)
for i in range(10000):
    z = tirage_Z(4)
    liste_Z[z-1] = liste_Z[z-1]+1

print(liste_Z/10000)
```

et on obtient l'affichage suivant :

```
[0.0166    0.327    0.5635    0.0929]
```

Que représentent les nombres obtenus ? Justifier que le premier est une valeur approchée de $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$.

Partie IV : Loi de Z_k pour $n = 4$.

On suppose encore dans cette partie que $n = 4$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

12. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathbb{P}(Z_k \geqslant 5)$.

13. Montrer : $\mathbb{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

14. On note, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, A_i l'événement : « la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages » .

   (a) Exprimer l'événement $(Z_k \leqslant 3)$ en fonction des A_i.
   On admet que cette expression permet de démontrer la formule :

$$\mathbb{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathbb{P}(A_1) - 6\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

   (b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

   (c) En déduire : $\mathbb{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $\mathbb{P}(Z_k = 3)$ et $\mathbb{P}(Z_k = 4)$.