Ex 11 du TD variables aléatoires (d'après EDHEC 2002)
Corrigé

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant « Pile » avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaîne de « Pile » une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés « Pile » , cette suite devant être précédée d'un « Face » ou débuter le tirage, et suivie d'un « Face » ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de « Pile » obtenues au cours des n lancers.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient « Pile » au k-ème lancer ».
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 1$ et pour tout $k \geqslant 4$, $Y_k = 0$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$ l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1. **Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.**

   Y_n compte le nombre de n-chaînes de Pile sur n lancers : elle vaut donc 1 si tous les lancers ont donné Pile, et 0 sinon.
   $P(Y_n = 1) = P(P_1 \cap ... \cap P_n) = p^n$ par indépendance des lancers ; et comme $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ on conclut $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^n)$ et donc $E(Y_n) = p^n$.

2. **Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.**

   Y_{n-1} vaut 1 si on a une succession de $n-1$ Pile. En termes d'événements :

   $$(Y_{n-1} = 1) = (P_1 \cap ... \cap P_{n-1}F_n) \cup (F_1 \cap P_2 ... \cap P_n)$$

   Par indépendance des lancers et incompatibilité, $P(Y_{n-1} = 1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$.

   On s'intéresse maintenant à $Y_{n-1}(\Omega)$. On voit qu'il est impossible d'avoir plus d'une $(n-1)$ chaîne (y compris dans le cas $n = 2$, car si on a «deux 1-chaîne», on a P_1P_2 donc en fait c'est une 2-chaîne !).
   Donc ici encore $Y_{n-1}(\Omega) = \{0, 1\}$ et le calcul précédent montre que $Y_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(2qp^{n-1})$ et donc $E(Y_{n-1}) = 2qp^{n-1}$.

3. **Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.**
   Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de « Pile » commence au i-ème lancer et qui vaut 0 sinon.

   (a) **Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.**
   $X[_{1,k}= 1]$ ssi une k-chaîne commence au 1er lancer, donc ssi les $k+1$ premiers lancers donnent $P_1 \dots P_kF_{k+1}$ (attention il faut terminer la chaîne !!).
   Donc
   $$P(X_{1,k} = 1) = P\big(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\big) = p^kq$$
   par indépendance des lancers.

   (b) **Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.**
   Cette fois la chaîne commence en i, donc concerne les lancers i, $i+1$, ..., $i+k-1$.
   $i \geqslant 2$ donc pour que la chaîne *commence* en i, il faut un Face au lancer $i-1$; et avec $i \leqslant n-k$ par hypothèse, on a $i+k-1 \leqslant n-k+k-1 = n-1$ donc le lancer $i+k-1$ n'est pas le dernier : il faut un Face en $i+k$ pour arrêter la chaîne.
   Ainsi :
   $$P(X_{i,k} = 1) = P\big(F_{i-1} \cap P_i \cdots \cap P_{i+k-1} \cap F_{i+k}\big) = qp^kq = q^2p^k$$

(c) **Montrer que** $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$**.**

Une k-chaîne de Pile qui commence au lancer $n-k+1$ va jusqu'au lancer $(n-k+1)+k-1 = n$: elle se termine avec la série de lancers ! Donc le «Face» qui clôt la chaîne dans la question précédente n'a pas lieu ici.

Par contre, avec $k \leqslant n-2$, $n-k+1 \geqslant n-(n-2)+1 \geqslant 3$ donc le lancer $n-k+1$ n'est pas le premier : il faut un Face au lancer $n-k$ avant le début de la k-chaîne.

Pour résumer

$$[X_{n-k+1,k} = 1] = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap P_{n-k+2} \cdots \cap P_n$$

et donc

$$P(X_{n-k+1,k} = 1) = P(F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap P_{n-k+2} \cdots \cap P_n) = qp^k$$

(d) **Exprimer** Y_k **en fonction des variables** $X_{i,k}$**, puis déterminer** $E(Y_k)$**.**

Argument classique derrière lequel se cachent des indicatrices : pour avoir le nombre de k-chaînes, on somme sur i les $X_{i,k}$ car $X_{i,k}$ donne le nombre de k-chaînes qui commencent au lancer i (il y en a 0 ou 1 !).

i varie ici de 1 à $n-k+1$ car il ne peut pas y avoir de k-chaîne commençant plus loin (elle ne rentrera pas : dans le cas de 5 lancers, on ne peut pas avoir une 3-chaîne qui commence au 4ème lancer par exemple !!).

Autrement dit $Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}$. Alors par linéarité de l'espérance : $E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k})$.

Les $X_{i,k}$ étant des variables de Bernoulli, on a toujours $E(X_{i,k}) = P(X_{i,k} = 1)$. On déduit, en découpant la somme suivant les cas particuliers traités aux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k}) &= E(X_{1,k}) + \sum_{i=2}^{n-k} E(X_{i,k}) + E(X_{n-k+1,1}) \\
&= p^k q + \sum_{i=2}^{n-k} p^k q^2 + p^k q \\
&= 2p^k q + \big((n-k)-2+1\big) p^k q^2 \\
E(Y_k) &= 2p^k q + (n-k-1) p^k q^2
\end{aligned}$$