Programme de colle n°6

Semaine du 4/11

Annexe

Exercices type d'algèbre linéaire

1. **Soit** $\mathrm{F} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y-2t=0 \end{cases} \right\}$**.**
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$**, et en donner une base.**

   Réponse : On a :

   $$(x,y,z,t) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2t-z-t=0 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-t \\ y=2t \end{cases}$$

   donc $\mathrm{F} = \left\{(z-t,2t,z,t) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{z(1,0,1,0)+t(-1,2,0,1) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,0),(-1,2,0,1)\big)$.
   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et la famille $\left\{(1,0,1,0),(-1,2,0,1)\right\}$ est génératrice de F.
   Cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires ; c'est donc une famille libre , et donc c'est une base de F. On a aussi $\dim(\mathrm{F}) = 2$ (le cardinal de la base obtenue).

2. **Soit** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x-3y-7z, -x+2y+4z, 2x-y+z)$**.**
   Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ **et** $\mathrm{Ker}(f)$**.**

   Réponse : On résout $f(u) = (0,0,0)$.
   Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

   $$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-7z=0 \\ -x+2y+4z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{...pivot...} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-3z \end{cases}$$

   d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{(-2z,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((-2,-3,1)\big)$.
   Le vecteur $(-2,-3,1)$ est non nul donc forme une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   Par le théorème du rang on a : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$; on en déduit $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

   On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\big) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,2),(-3,2,-1),(-7,4,1)\big)$. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 donc toute famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ en constitue une base. Ainsi on a par exemple :
   $\big((1,-1,2),(-3,2,-1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ (deux vecteurs non colinéaires).

3. **Montrer que la famille** $\{(-1,3,1),(0,0,1),(1,-2,1)\}$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$**. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur** (a,b,c)**.**

   Réponse : Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trois réels.
   On a

$$\lambda_1(-1,3,1)+\lambda_2(0,0,1)+\lambda_3(1,-2,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

   ce qui montre que la famille donnée est libre. On a alors une famille libre à 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec $\dim(\mathbb{R}^3)=3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Les coordonnées de (a,b,c) dans cette base sont les uniques x,y,z tels que

$$(a,b,c)=x(-1,3,1)+y(0,0,1)+z(1,-2,1)$$

   Traduit sous forme de système on obtient

$$\begin{cases} -x+z=a \\ 3x-2z=b \\ x+y+z=c \end{cases}$$

   ce qui donne après résolution $x=b+2a$, $y=c-2b-5a$, $z=b+3a$.