ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

TD4
Espaces vectoriels

1 Géneralités

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? (on démontrera ce qu'on affirme)

1. **(*)** $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
2. **(*)** $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
3. **(*)** $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
4. **(*)** $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y - z = 1\}$
5. **(*)** $F_5 = \left\{M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid x + t = 0\right\}$
6. **(*)** $F_6 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MX = 2X\}$ (où $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé non nul).
7. **(*)** $F_{6bis} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ (où $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé non nul).
8. **(*)** $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$
9. **(*)** F_8 : l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversibles.
10. F_9 : L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tels que $P(0) = P(1)$.
11. F_{10} : L'ensemble des polynômes de degré 3.

(*) Pour les ensembles parmi les neuf premiers (sauf F_6 et F_{6bis}) qui sont des sev, en donner une base.

Exercice 2. Déterminer si les familles suivantes sont libres ; si elles ne le sont pas, en extraire une famille libre engendrant le même espace vectoriel.

1. $\{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}\right\}$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. $\{X-1, X+1, X^2-1\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
5. $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ dans $\mathbb{R}_2[x]$, où pour tout réel x : $P_1(x) = x-1,\ P_2(x) = x+1,\ P_3(x) = x^2-1,\ P_4(x) = 2x+3$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, u_2) \in E^2$. Montrer que si (u_1, u_2) est libre, alors (u_1+u_2, u_1-u_2) est libre.

Exercice 4. **(*)** Écrire les ensembles suivants comme des espaces engendrés ; en donner à chaque fois une base.

1. $F_1 = \{(3y - z, z + y, 4y) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

2. $F_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x+3t=0 \\ z-x=0 \end{array} \right. \right\}$

3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ (on pourra écrire un polynôme P sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ et déterminer des conditions sur a, b, c, d pour que P appartienne à F_3).

4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x+2z & x-y & x+y+z \\ 0 & 3x-z & 3x+z \\ 2y & x-y-z & y+7z \end{pmatrix} \middle| (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

5. $F_4 = \{P_{a,b} = aX^2 + (b-a)X - b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

6. L'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = -M$ (appelées matrices *antisymétriques* ; cet ensemble est noté $A_3(\mathbb{R})$).

2 Avec les dimensions

Exercice 5. On reprend l'espace $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ défini dans le premier exercice.
On note $P_1 = X-1$, $P_2 = X^2 - X$, $P_3 = X^3 - X^2$.
Donner la dimension de F, et montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F.

Exercice 6. Donner le rang des familles de l'exercice 2.

Exercice 7. Soient les deux sev de $\mathbb{R}^3$ donnés par $F_1 = \mathrm{Vect}\big((2,3,-1),(1,-1,2)\big)$, et $F_2 = \mathrm{Vect}\big((8,7,1),(6,-1,7)\big)$.

1. Montrer que $(8,7,1) \in F_1$ et $(6,-1,7) \in F_1$.
2. Déterminer $\dim(F_1)$ et $\dim(F_2)$.
3. En déduire $F_1 = F_2$.

Exercice 8. (*)

1. Montrer que la famille $\{(1,3,-2),(-1,-2,5),(0,1,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur (a,b,c).
2. Soient $P_1 = 1$ et $P_2 = X-1$.
Montrer que la famille $(P_1, P_2, (P_2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées dans cette base de $Q = X^2 + X + 1$.
3. Montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donner les coordonnées dans cette base de la matrice I_2.

Exercice 9.
Donner le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1. Déterminer les réels x et y tels que $v = (x,1,-1,y)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,1,2,1)$ et $v_2 = (2,1,5,3)$.

2. À quelle condition sur (x, y, z) le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (3, -1, 3)$ et $v_2 = (-1, 2, 4)$?

Exercice 11. Soit $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on note E l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{MK} = \mathrm{KM} = \mathrm{M}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice de E est non inversible.
3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, \ldots, h, i$ pour que $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.
   En déduire une base de E, et $\dim(\mathrm{E})$.

3 Plus difficile

Exercice 12. *On rappelle le résultat essentiel suivant sur les polynômes : soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Si P admet (au moins) $n+1$ racines deux à deux distinctes, alors c'est le polynôme nul.*

1. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ tels que : $\mathrm{P}(0) = \mathrm{Q}(0)$; $\mathrm{P}(1) = \mathrm{Q}(1)$; $\mathrm{P}(2) = \mathrm{Q}(2)$. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.
   Soient les polynômes suivants : $\mathrm{L}_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{L}_1 = -\mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{L}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$.
2. Calculer les $\mathrm{L}_i(j)$ pour $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$.
3. En utilisant la question 1, montrer : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(0)\mathrm{L}_0 + \mathrm{P}(1)\mathrm{L}_1 + \mathrm{P}(2)\mathrm{L}_2$. Qu'a-t-on montré sur la famille $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$?
4. Montrer que $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}$ dans cette base.
5. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconques. Déterminer un polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ (qu'on exprimera en fonction des L_i) tel que $\mathrm{R}(0) = a$, $\mathrm{R}(1) = b$, $\mathrm{R}(2) = c$. Montrer que ce polynôme est unique.

Indications

1
1. oui
2. non : regarder l'opposé d'un vecteur
3. oui
4. non : système linéaire non homogène
5. oui
6. oui
7. oui
8. non : penser à la matrice nulle
9. oui
10. non : par exemple trouver deux polynômes de degré 3 dont la somme ne l'est pas

2
1. libre
2. liée ; il y a une famille géné à deux vecteurs
3. liée (on le sait sans calcul ! pourquoi ?) ; il y a une famille géné à deux vecteurs
4. libre
5. liée ; il y a une famille géné à trois vecteurs

3 Soit une combinaison linéaire nulle de $u_1 + u_2$ et $u_1 - u_2$; la transformer en une combi lin nulle de u_1 et u_2 et utiliser la liberté de cette famille.

4 RAS. Réponses possibles (on donne à chaque fois une base) :
1. $F_1 = \mathrm{Vect}\big((3,1,4),(-1,1,0)\big)$
2. $F_2 = \mathrm{Vect}\,(X^3 - X, X^2 - X)$.
3. $F_3 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix})$.
4. $F_4 = \mathrm{Vect}\,(X^2 - X, X^2 - 1)$
5. $F_5 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

5 dim(F) se déduit de la base trouvée précédemment ; et servira à montrer que la famille proposée est aussi une base.

6 Se souvenir de la définition du rang d'une famille de vecteurs. Il suffit alors de compter.

7
1. Chercher à écrire ces vecteurs comme des combinaisons linéaires des vecteurs engendrant F_1.
2. Trouver des bases de F_1 et F_2 (ne pas aller chercher trop loin !)
3. Il suffit d'une inclusion. Pourquoi ? Et laquelle ?

8 Appliquer les diverses définitions du cours. On trouve les colonnes de coordonnées suivantes :
1. $\begin{pmatrix} 9a - 2b + c \\ 8a - 2b + c \\ -11a + 3b - c \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

9 Se ramener à la définition : dimension du sev engendré par les lignes ; ou de celui engendré par les colonnes (parfois l'un est plus facile que l'autre).
1. $\mathrm{rg}\,(M_1) = 2$
2. $\mathrm{rg}\,(M_2) = 1$
3. $\mathrm{rg}\,(M_3) = 3$
4. $\mathrm{rg}\,(M_4) = 3$
5. $\mathrm{rg}\,(M_5) = 1$

10
1. On cherche donc s'il existe deux coefficients α et β tels que $(x,1,-1,y) = \alpha(1,1,2,1) + \beta(2,1,5,3)$.
   On trouvera que ces coeff existent ssi $x = 0$ et $y = -1$.
   NB : les valeurs de α et β ne sont pas demandées, seulement leur existence !

2. C'est le même principe ; trouver $2x+3y-z=0$.

11 1. Ici il n'est pas du tout habile de chercher une famille génératrice. Revenir à non vide / stable par c-lin.

2. Par l'absurde : si $KM = M$ avec M inversible, que dire de K ?

3. Cette fois il faut mettre les mains dans le cambouis !

12 1. Compter les racines de $P - Q$

2.

3. Utiliser la question 1 avec $P = P$, et $Q = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$.

4. Pour les coordonnées il n'y a presque aucun calcul : regarder la question précédente.

5. Chercher R comme combinaison linéaire des L_i ; les coefficients seront solution d'un système simple !
L'unicité découle d'une question précédente (s'il y en a deux qui prennent les mêmes valeurs en 0,1,2,...)