DM3
À rendre pour le 19/11

Exercice 1 (EML 2017 mais ne pas regarder la correction SVP)

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.
   NB : le nombre de lignes à compléter n'est pas forcément celui qui est indiqué.

```python
def experience(n):
    b=1 # b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r=2 # r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s=0 # s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k ... :
        x = rd.random()
        if ... :
            ...
        else :
            ...
    return ...
```

2. On exécute le programme suivant :

```python
n=10
m=0
for i in range(1000):
    m=m+experience(n)
print(m/1000)
```

   On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
7. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.
   (b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,
   puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
    (b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.
    (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Exercice 2

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

1. Donner une base et la dimension de $\mathscr{F}$.
2. Calculer les produits J^2, K^2, JK, KJ. En déduire que $\mathscr{F}$ est *stable par produit,* c'est-à-dire : $\forall (M, M') \in \mathscr{F}^2$, $MM' \in \mathscr{F}$.
3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de $\mathscr{F}$. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.
   (a) Montrer que M est inversible ssi $a \neq 0$.
   (b) Pour $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$, calculer le produit $\big(I + bJ + cK\big)\big(I + xJ + yK\big)$. En déduire $M(1, b, c)^{-1}$.
4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice $M(1, 1, 1) = I + J + K$.
   (a) Exprimer $\big(I + J + K\big)^2$ et $\big(I + J + K\big)^3$ comme des combinaisons linéaires de I, J, K.
   (b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que
   $$\big(I + J + K\big)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$
   Justifier que ces réels sont uniques.
   Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
   (c) Déterminer la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; puis de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. On rappelle que pour M inversible, on définit $\mathrm{M}^{-n} = \left(\mathrm{M}^{-1}\right)^n$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier $n > 0$, on a
$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\right)^{-n} = \mathrm{I} - n\mathrm{J} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{K}$$