DM3bis

À rendre pour le 19/11

ESSEC2 2021

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements et, notamment, le fait de prévoir le remplacement d'éléments défaillants. Imaginons par exemple qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire ; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite... Une bonne gestion nécessite donc d'avoir connaissance du comportement des pannes successives, et notamment de ce comportement en moyenne, pour pouvoir prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement et le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste la décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on regarde quelques propriétés de base du processus. Enfin la troisième est consacrée à la détermination du comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.
Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance et $\mathrm{Var}(Y)$ sa variance quand elles existent. On **admettra** en outre la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires positives telles que $Y \leqslant Z$ et $\mathbb{E}(Z)$ existe, alors Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(Z)$.
Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ positives, indépendantes, et de même loi. On notera, pour tout réel t, $F(t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. On suppose $F(0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$. De plus, on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $\mathbb{E}\left(X_1^4\right)$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1, S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On admet dans ce problème les *théorèmes de limite monotone :*

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *croissante* d'événements (*ie :* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *quelconque* d'événements
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$$
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *décroissante* d'événements (*ie :* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $B_n \supset B_{n+1}$), alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

ainsi que *l'inégalité de Markov :*
Soit X une variable aléatoire *positive, admettant une espérance* ; et soit $t > 0$. On a
$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. (a) i. Soit r un entier naturel tel que $1 \leqslant r \leqslant 4$. Montrer que $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.
   ii. Montrer que pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}, X_1^r$ admet une espérance.

   On notera tout au long du problème $\mu = \mathbb{E}(X_1)$**.**

   iii. Montrer que $\mu > 0$.

iv. Montrer que la variable aléatoire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé.

   (a) Montrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$ que : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$.

   (b) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

3. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.
   On pose pour tout entier $n \geqslant 1, B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, B_n \supset B_{n+1}$. On pose $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

   (b) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (*) $\omega \in B$;
   (**) ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.

   (c) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

   (d) Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

   (e) Déduire que $\mathbb{P}(B) = 0$.

4. Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées (*i.e.* d'espérance nulle) et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $\mathrm{Var}(Y_1) = \mathbb{E}\left(Y_1^2\right) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}\left(Y_1^4\right) = \rho^4$.
   On pose enfin, pour tout entier $n \geqslant 1, \Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   (a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

      i. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4}\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$.

      ii. Montrer que

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k W_k$$

      où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ (on ne cherchera pas à expliciter cette variable aléatoire).

      iii. Montrer que $\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$.

      iv. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n strictement positif

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}$$

      v. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leqslant \frac{C}{n^{3/2}}$.

5. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right]$.

   (a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

   (b) En déduire que la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

   (c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

   (d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

6. (a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   On considère la fonction S_∞ définie sur Ω par $S_\infty(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ diverge.

   (b) Montrer que si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

   (c) En déduire que $\mathbb{P}(S_\infty = +\infty) = 1$.

Deuxième partie : le processus de renouvellement

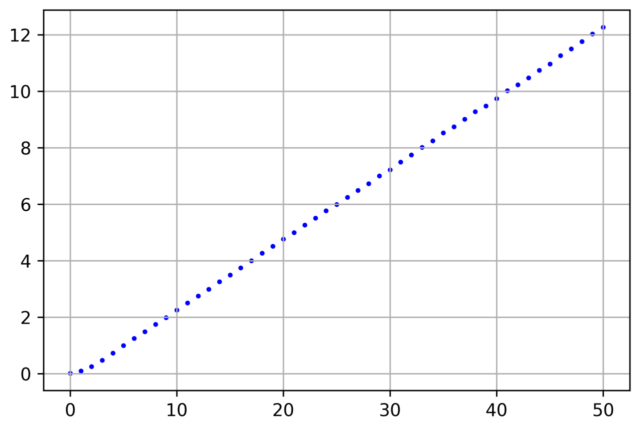
On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1 , la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire

$$N_t = \max\left\{k \in \mathbb{N}, S_k \leqslant t\right\}$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

7. (a) Soient deux réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Montrer que $N_s \leqslant N_t$.
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité des événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.
   (c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, montrer que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega)$ existe (elle est éventuellement infinie). On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.
   (d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose $N_\infty(\omega) = K$.
      i. Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que $\forall t \geqslant T_\omega,\ N_t(\omega) = K$.
      ii. Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$, et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geqslant T_\omega$.
      iii. En déduire que si $N_\infty(\omega) = K$ alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout t réel positif, ce qui est absurde.
      iv. Conclure que $\mathbb{P}(N_\infty = +\infty) = 1$.

8. On suppose importé le package `numpy.random` sous l'alias `rd`.
   (a) Programmer une fonction Python `renouvellement(t,p)` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire N_t dans le cas où les variables X_i suivent la loi $\mathscr{P}(\lambda)$.
   (b) Proposer un script Python qui affiche une représentation graphique de valeurs approchées de $\mathbb{E}(N_t)$, où $t \in [\![0,50]\!]$ et $\lambda = 4$.
   (c) Cette fonction renvoie le tracé suivant. Quel équivalent de $\mathbb{E}(N_t)$ peut-on conjecturer pour $t \to +\infty$?



9. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geqslant n) - \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1)$$

   (b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on note $F_n(t) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t)$.
      i. Déterminer F_0 et F_1.
      ii. Montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

10. Soient U, V, U', V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $\mathbb{P}(U = k) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}_{[U=k]}(V = j) = \mathbb{P}_{[U'=k]}\left(V' = j\right)$$

    Montrer que V et V' suivent la même loi.

11. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
    On note $W = \min\left\{k \geqslant 1, Z_k = 1\right\}$.

(a) Montrer que pour tout $i \geqslant 1, \mathbb{P}(\mathrm{W} = i) = p(1-p)^{i-1}$.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{W}_n = \min\left\{k \geqslant 1, \sum_{l=1}^{k} \mathrm{Z}_l = n\right\}$.

i. Montrer que pour tout $k \geqslant n$, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{W}_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

ii. Montrer que pour tout $k \geqslant n$ et $j \geqslant k+1$, on a

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{W}_n = k]}\left(\mathrm{W}_{n+1} = j\right) = p(1-p)^{j-k-1}$$

(c) On suppose que pour tout entier $i \geqslant 1, \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = i) = p(1-p)^{i-1}$.

i. Montrer que pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$, on a

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{S}_n = k]}\left(\mathrm{S}_{n+1} = j\right) = p(1-p)^{j-k-1}$$

ii. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1, \mathrm{S}_n$ a même loi que W_n.

(d) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier naturel n non nul, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{N}_t = n) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier naturel inférieur ou égal à t (par convention $\sum_{k=r}^{s} = 0$ si $r > s$).

Troisième partie : Théorème du renouvellement

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

12. (a) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0, \mathrm{S}_{\mathrm{N}_t} \leqslant t < \mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}$.

(b) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $\mathrm{T}_\omega > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant \mathrm{T}_\omega$,

$$\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t}(\omega)}{\mathrm{N}_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{\mathrm{N}_t(\omega)} < \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}(\omega)}{\mathrm{N}_t(\omega)}$$

(c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t}}{\mathrm{N}_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}}{\mathrm{N}_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(e) En déduire que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{N}_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

On va maintenant chercher à montrer que le résultat précédent s'étend en moyenne, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{N}_t}{t}\right) = \frac{1}{\mu}$$

13. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $\mathrm{S}_\mathrm{J} = \sum_{k=1}^{\mathrm{J}} \mathrm{X}_k$.

(a) Montrer que $\mathrm{S}_\mathrm{J} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{X}_k \mathbb{1}_{[\mathrm{J} \geqslant k]}$ où $\mathbb{1}_\mathrm{A}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin \mathrm{A}, \\ 1 & \text{si } \omega \in \mathrm{A}. \end{cases}$

On suppose désormais que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable $\mathbb{1}_{[\mathrm{J} \leqslant n]}$ est indépendante des variables $\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{X}_{n+2}, \ldots$ On **admettra** que si $(\mathrm{W}_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires positives, l'écriture formelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{W}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{W}_n\right)$ est toujours valide sous réserve d'existence.

(b) Montrer que les variables aléatoires X_k et $\mathbb{1}_{[\mathrm{J} \geqslant k]}$ sont indépendantes.

(c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i. Montrer que $\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[\mathrm{U}\geqslant n]}$.

ii. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{U}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}\geqslant n)$.

iii. Montrer que $\mathbb{E}\left(\mathrm{S_J}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1\right)\mathbb{E}(\mathrm{J}) = \mu\mathbb{E}(\mathrm{J})$.

14. (a) Soient un réel $t>0$ et un entier $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{J}=\mathrm{N}_t+1$. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[\mathrm{J}\leqslant n]}$ est indépendante de $\mathrm{X}_{n+1},\mathrm{X}_{n+2},\ldots$

(b) En déduire que $\mathbb{E}\left(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}\right) = \mu\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right)+1\right)$ puis que $\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right) = \dfrac{\mathbb{E}\left(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}\right)}{\mu} - 1$.

15. Montrer que pour tout $t>0$, $\dfrac{\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right)}{t} \geqslant \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t}$.

16. Soit $b>0$. On pose $\widetilde{\mathrm{X}}_i = \min\left(b,\mathrm{X}_i\right)$.

(a) Montrer que les variables $\widetilde{\mathrm{X}}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

(b) On pose $\widetilde{\mathrm{S}}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathrm{X}}_i$ et $\widetilde{\mu}_b = \mathbb{E}\left(\widetilde{\mathrm{X}}_1\right)$. On considère le processus de renouvellement $\widetilde{\mathrm{N}}_t$ associé aux $\widetilde{\mathrm{X}}_i$.

i. Montrer que $\forall n\geqslant 1, \widetilde{\mathrm{S}}_n \leqslant \mathrm{S}_n$.

ii. Montrer que $\forall t\geqslant 0, \widetilde{\mathrm{N}}_t \geqslant \mathrm{N}_t$.

iii. Montrer que $\forall t\geqslant 0, \widetilde{\mathrm{S}}_{\widetilde{\mathrm{N}}_t+1} \leqslant t+b$.

(c) i. Montrer que pour tout réel $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\mathbb{E}\left(\widetilde{\mathrm{N}}_t\right)}{t} = \dfrac{\mathbb{E}\left(\widetilde{\mathrm{S}}_{\widetilde{\mathrm{N}}_t+1}\right)}{t\widetilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t}$

ii. En déduire que pour tout réel $b>0$,

$$\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right)}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\widetilde{\mathrm{N}}_t\right)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\widetilde{\mu}_b}$$

(d) On choisit $b=\sqrt{t}$.

i. Montrer que

$$\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\mathbb{E}\left(\min\left(\sqrt{t},\mathrm{X}_1\right)\right)}$$

ii. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{X}_1 - \min\left(\sqrt{t},\mathrm{X}_1\right) \leqslant \mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1>\sqrt{t}]}$.

iii. Montrer que si X_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1>\sqrt{t}]}\right) = \sum_{n\geqslant\sqrt{t}} n\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$. En déduire $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1>\sqrt{t}]}\right)$.

On supposera que cette limite est toujours valable dans le cadre de ce problème.

iv. En déduire que $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left(\min\left(\sqrt{t},\mathrm{X}_1\right)\right) = \mu$.

v. Conclure que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}\left(\mathrm{N}_t\right)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$.