ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

DM3
Indications

Exercice 1

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I

1. Se souvenir que la proba de tirer une rouge dans l'urne évolue avec le nombre de rouges et de bleues dans cette même urne.
2.

Partie II

3. (a) Les tirages successifs ne sont pas indépendants : donc utiliser une formule célèbre pour calculer la probabilité d'une intersection.
   (b)
4.

Partie III

5. Penser à sommer les X_k. Et faire une phrase de justification.
6.
7. (a) Détailler les 4 valeurs possibles de ce couple.
   (b) Passage conjointe $\to$ marginale.
   (c)
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Très similaire à 3a.
   (b) Cette fois les k rouges peuvent être tirées n'importe quand ; alors que dans la question précédente on a considéré que c'était sur les k premiers tirages.
   Regarder (par exemple) $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap R_{n-k+1} \cap \ldots \cap R_n)$ et expliquer comment on calcule la proba des autres configurations.
9. On peut utiliser la loi de S_n ; on peut aussi faire BEAUCOUP plus rapide.
10. (a) Sachant $[S_n = k]$, que contient l'urne avant le $(n+1)$-ème tirage ?
    (b) Ne pas remplacer brutalement les expressions ; et faire apparaître $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([S_n = k])$.
    (c)

Exercice 2

1.

2.

3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de $\mathscr{F}$. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{M}(a,b,c) = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$.

   (a) $\mathrm{M}(a,b,c)$ a une forme particulière ; qui simplifie beaucoup la discussion sur l'inversibilité.

   (b) Utiliser la question 2 ! Puis utiliser le résultat qu'on vient de trouver pour trouver une matrice N telle que $\mathrm{M}(1,b,c)^{-1} \times \mathrm{N} = \mathrm{I}_3$.

4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice $\mathrm{M}(1,1,1) = \mathrm{I} + \mathrm{J} + \mathrm{K}$.

   (a) Encore la question 2 ; et attention les identités remarquables ne marchent pas toujours sur des matrices !!

   (b) Zéro calcul pour l'existence et l'unicité de a_n, b_n, c_n : revenir à la définition d'une base.
   Par contre pour $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ il faut calculer. Mais il n'est pas nécessaire d'aller manipuler les coefficients des matrices ; ce travail a déjà été fait précédemment.

   (c)

   (d)

5. On ne touche toujours pas aux coefficients ! Montrer que $\mathrm{M}^{-n} = \left(\mathrm{M}^n\right)^{-1}$.
   Ensuite se souvenir que « montrer qu'une matrice donnée est l'inverse de M^n » est une question BEAUCOUP PLUS SIMPLE que « calculer l'inverse de M^n » .