

DM3 Corrigé

Exercice 1

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de \mathbb{N}^* , on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k -ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k -ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.
NB : le nombre de lignes à compléter n'est pas forcément celui qui est indiqué.

Si l'urne contient b boules bleues et r boules rouges, on y tire une boule rouge avec probabilité $\frac{r}{b+r}$.

```
def experience(n):  
    b=1 # b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne  
    r=2 # r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne  
    s=0 # s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages  
    for k in range(n) : # n tirages  
        x = rd.random()  
        if x<r/(b+r) : # si on tire une rouge  
            s = s+1 # on augmente le compteur de rouges  
            r = r+1 # on rajoute une rouge  
        else : # si on tire une bleue  
            b=b+1 # on rajoute une bleue  
    return s
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n=10  
m=0  
for i in range(1000):  
    m=m+experience(n)  
print(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

m contient la somme, sur 1000 expériences, des nombre de rouges obtenues sur 10 tirages. $m/1000$ donne alors le nombre moyen de boules rouges obtenues sur 10 tirages.

Sur un grand nombre d'expériences aléatoires, la valeur moyenne des résultats obtenus donne une approximation de l'espérance : ainsi, si X est la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues sur 10 tirages, on a $E(X) \approx 6.657$.

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Si $n = 1, \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$ et la formule est vérifiée.

Sinon prenons $n \geq 2$ pour que les événements décrits commencent avec le tirage d'une rouge. Avec les événements définis par l'énoncé,

$$(Y = n) = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap B_n$$

Attention ici les événements ne sont pas indépendants : le contenu de l'urne évolue !! On utilise la formule des probas composées :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(B_n)$$

L'urne contient initialement 1 bleue et 2 rouges, donc $\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$.

Pour le second tirage on a rajouté une rouge, donc $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{4}$.

Et ainsi de suite, jusqu'à $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) = \frac{n}{n+1}$ (si l'événement $R_1 \cap \dots \cap R_{n-2}$ est réalisé on a rajouté $(n-2)$ rouges dans l'urne, qui contient maintenant n rouges et une bleue).

Enfin au dernier tour, $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n+2}$.

On a donc

$$\mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

(b) **La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?**

On examine la convergence (absolue, mais on a ici des termes positifs) de la série de terme général

$$n\mathbb{P}(Y = n) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Par comparaison de SATP avec la série harmonique qui diverge, Y n'admet pas d'espérance.

Si elle admettait une variance, elle admettrait également une espérance : Y n'admet donc pas de variance.

4. **Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?**

C'est assez similaire : on rajoute une bleue entre chaque tirage.

Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = n) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} \\ \mathbb{P}(Z = n) &= \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Pour $n = 1, \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$ et la formule précédente est encore valable.

Cette fois $n\mathbb{P}(Z = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$ donc Z admet une espérance ; par contre $n^2\mathbb{P}(Z = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{n}$ donc Z^2 n'admet pas d'espérance ; et donc Z n'admet pas de variance.

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k -ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5. **Donner, pour tout n de \mathbb{N}^* , une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.**

Avec les définitions données, S_n est le nombre de X_k , avec $1 \leq k \leq n$, qui prennent la valeur 1. On a donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

6. **Déterminer la loi de X_1 , son espérance et sa variance.**

X_1 est l'indicatrice de l'événement R_1 .

$$X_1(\Omega) = \{0, 1\}; \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \text{ et donc } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3).$$

$$\text{On en déduit } \mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{3} \text{ et } V(X_1) = \frac{2}{9}.$$

7. (a) **Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .** Il faut examiner les 4 événements $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$; $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)$; $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)$; $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$.

Avec des probas composées comme en 3a / 3b :

$$\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6};$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}; \text{ (NB : c'est } \mathbb{P}(Y = 2)\text{)}$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}; \text{ (NB : c'est } \mathbb{P}(Z = 2)\text{)}$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

(NB : la somme des probas obtenues vaut bien 1)

- (b) **En déduire la loi de X_2 .**

Probabilités totales sur le SCE $(X_1 = 0), (X_1 = 1)$:

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) + \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Comme X_2 est aussi une variable de Bernoulli, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3)$.

- (c) **Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?**

$$\text{NON : } \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)).$$

8. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.**

- (a) **Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$.**

Encore des probas composées : dans la première partie du calcul on ajoute une rouge entre deux tirages ; puis une bleue ensuite.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n) &= (\mathbb{P}(R_1) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}}(R_k)) \times (\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_k}(B_{k+1}) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{k+1}{k+2} \right) \times \left(\frac{1}{k+3} \times \frac{2}{k+4} \times \dots \times \frac{n-k}{n+2} \right) \\ &= \frac{(k+1)!(n-k)!}{\frac{(n+2)!}{2}} = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \end{aligned}$$

- (b) **Justifier :** $\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$, **puis en déduire :** $\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

On voit que toute intersection de B_i et R_j menant à $(S_n = k)$ aura la même probabilité : les dénominateurs successifs formeront toujours $\frac{(n+2)!}{2}$, et les numérateurs donneront les factorielles $(k+1)!$ (donnée par les $\mathbb{P}(R_j)$) et $(n-k)!$ (donnée par les $\mathbb{P}(B_j)$).

$(S_n = k)$ est la réunion disjointe de tous les intersections de type $R_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_n$ où il y a k événements « R » et $(n-k)$ événements « B ».

Il y a $\binom{n}{k}$ telles intersections (le choix des positions des k « R » dans la chaîne) ; et on a vu que toutes ces intersections ont la même probabilité.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{n!}{(n+2)!} \frac{2(k+1)!}{k!} \\ &= \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

9. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$.**

$S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ (sur n tirages on peut tirer entre 0 et n rouges).

$\mathbb{E}(S_n)$ existe car S_n est à support fini ; et

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=0}^n k \times \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n k^2 \right)$$

et on trouve la formule souhaitée avec les formules usuelles de $\sum k$ et $\sum k^2$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) **Montrer :** $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{\{S_n=k\}}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$.

Sachant $S_n = k$, on a tiré k rouges (et donc $n - k$ bleues) sur les n premiers tirages.

L'urne contient maintenant $k + 2$ rouges (on en a ajouté k) et $n + 3$ boules au total (on en a ajouté n).

La proba recherchée est celle de tirer une rouge dans une telle urne : on a bien

$$\mathbb{P}_{\{S_n=k\}}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$$

(b) **En déduire :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

Probas totales avec le SCE $(S_n = k)_{0 \leq k \leq n}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_{\{S_n=k\}}([X_{n+1} = 1]) \times \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k+2}{n+3} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{S_n + 2}{n+3}\right) \quad \text{par théorème de transfert} \\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3} \quad \text{par linéarité de l'espérance.} \end{aligned}$$

(c) **Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1} . Que remarque-t-on ?**

Avec $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$: $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{(2n/3) + 2}{n+3} = \frac{2}{3}$ et donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3)$: toutes les X_n suivent la même loi.

NB : on aurait pu remarquer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(S_{n+1} - S_n) = \mathbb{E}(S_{n+1}) - \mathbb{E}(S_n) = \frac{2}{3}$ avec la question 9 ; sachant que X_{n+1} est une variable de Bernoulli on obtient directement $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3)$.

Exercice 2

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, K)$.

1. Donner une base et la dimension de \mathcal{F} .

Il est facile de vérifier (mais il faut le faire, et ne pas dire que I, J, K sont non colinéaires !!!) que (I, J, K) est libre ; c'est donc une base de l'espace qu'elle engendre.

$$\dim(\mathcal{F}) = \text{Card}(\{I, J, K\}) = 3.$$

2. Calculer les produits J^2, K^2, JK, KJ . En déduire que \mathcal{F} est stable par produit, c'est-à-dire : $\forall (M, M') \in \mathcal{F}^2, MM' \in \mathcal{F}$.

Calcul direct : $J^2 = K, K^2 = KJ = JK = \mathbf{0}$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Avec ces formules les calculs se simplifient un peu : si $M = aI + bJ + cK$ et $N = dI + eJ + fK$ sont deux éléments de \mathcal{F} alors

$$MN = (aI + bJ + cK)(dI + eJ + fK) = adI + aeJ + afK + bdJ + beK + cdK = (ad)I + (ae + bd)J + (af + be + cd)K \in \mathcal{F}$$

et on a bien la stabilité par produit.

3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de \mathcal{F} . Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.

(a) Montrer que M est inversible ssi $a \neq 0$.

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ est triangulaire, donc inversible ssi tous ses coeff diagonaux sont non nuls.}$$

Ceci équivaut bien ici à $a \neq 0$.

(b) Pour $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$, calculer le produit $(I + bJ + cK)(I + xJ + yK)$. En déduire $M(1, b, c)^{-1}$.

Utiliser la question 2 !!

En changeant le nom des coefficients

$$(I + bJ + cK)(I + xJ + yK) = I + (b + x)J + (y + bx + c)K$$

On pense alors à chercher l'inverse de $M(1, b, c)$ sous la forme $M(1, x, y)$ avec x et y convenables.

D'après le calcul précédent, si $b + x = 0$ et $y + bx + c = 0$, on aura bien $(I + bJ + cK)(I + xJ + yK) = I$.

On résout alors :

$$\begin{cases} b + x = 0 \\ y + bx + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -b \\ y = -c - bx = b^2 - c \end{cases}$$

et on a donc $M(1, b, c)^{-1} = M(1, -b, b^2 - c)$.

4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice $M(1, 1, 1) = I + J + K$.

(a) Exprimer $(I + J + K)^2$ et $(I + J + K)^3$ comme des combinaisons linéaires de I, J, K.

On utilise encore le calcul :

$$(aI + bJ + cK)(dI + eJ + fK) = (ad)I + (ae + bd)J + (af + be + cd)K$$

Pour $a = b = c = d = e = f = 1$: $(I + J + K)^2 = I + 2J + 3K$

Et avec $a = b = c = d = 1, e = 2$ et $f = 3$:

$$(I + J + K)^3 = (I + J + K)(I + J + K)^2 = (I + J + K)(I + 2J + 3K) = I + 3J + 6K$$

(b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que

$$(I + J + K)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$

Justifier que ces réels sont uniques.

$$(I + J + K)^0 = I \in \mathcal{F}.$$

Par stabilité de \mathcal{F} par produit on a immédiatement : $I + J + K \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (I + J + K)^n \in \mathcal{F}$; ce qui par définition de \mathcal{F} signifie que $(I + J + K)^n$ s'exprime comme combinaison linéaire de I, J, K.

Les coefficients intervenant dans cette combinaison linéaire sont uniques : ce sont les coordonnées

de $(I + J + K)^n$ dans la base $\{I, J, K\}$. Par ailleurs .

Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

Encore un petit calcul :

$$(I + J + K)^{n+1} = (I + J + K)^n \times (I + J + K) = (a_n I + b_n J + c_n K)(I + J + K) = a_n I + (a_n + b_n)J + (a_n + b_n + c_n)K$$

d'où par unicité des réels $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{cases}$$

(c) **Déterminer la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; puis de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

La suite (a_n) est constante (première équation) : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 = 1$ (car $(I + J + K)^0 = I = I + 0.J + 0.K$ donne $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$).

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = b_n + 1$ et $b_0 = 0$. (b_n) est donc arithmétique et on a directement : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n$.

(d) **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n + n + 1$. Avec $c_0 = 0$ on a le résultat souhaité par une récurrence sans difficulté.

5. **On rappelle que pour M inversible, on définit $M^{-n} = (M^{-1})^n$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier $n > 0$, on a**

$$(I + J + K)^{-n} = I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

Il suffit de reprendre la question 3b.

$$\begin{aligned} (I + J + K)^{-n} &= ((I + J + K)^n)^{-1} = (a_n I + b_n J + c_n K)^{-1} = \left(I + nJ + \frac{n(n+1)}{2}K \right)^{-1} = I - nJ + \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right)K \\ &= I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \end{aligned}$$