TD6
Applications linéaires

Les bases

Exercice 1. (*)

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\text{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$ telle que $\text{Mat}(f, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(\mathrm{P})$, où $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   Donner l'expression de $f\big((x,y)\big)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_3[\mathrm{X}])$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   Donner l'expression de $f(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (*)
Les applications suivantes sont-elle linéaires?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 3y, y-2x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, x^2) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d, c-b) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}) & \longmapsto & \mathrm{XP}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}'(\mathrm{X}) \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AMB} \end{array} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ fixées})$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & {}^t(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n) \end{array}$$

Exercice 3. **(*)** Dans cet exercice on admet la linéarité des applications introduites (rien de bien compliqué mais c'est long et redondant avec l'exo précédent). Donner, pour chacune d'entre elles :

- La matrice dans les bases canoniques ;
- Le noyau (et une base de celui-ci s'il n'est pas réduit à 0), l'image (et une base de celle-ci en cas de non-surjectivité) et les dimensions de ces deux espaces ;
- Le caractère injectif /surjectif / bijectif.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x+y-3z, -x+y+z, 5x+2y-3z) \end{array}$$

On donnera la matrice de f_1 dans $\mathscr{B}_c(\mathbb{R}^3)$ puis dans la base $\mathscr{B} = \big\{(2,0,3),(1,0,1),(-1,1,-2)\big\}$.

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+2y-4z, x-4y+6z, 2x+4z, x+5y-3z) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-2b+c & b-c \\ c-b & -2a+4b-2c \end{pmatrix} \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + {}^t\mathrm{M} \end{array}$$

On donnera la matrice de f_4 dans $\mathscr{B}_c(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ puis dans la base $\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+3z & -2x+4y+4t & z-t \\ z+2t & x-y & x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{P} - (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' \end{array} \qquad f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}(-1)\big) \end{array}$$

$$f_8 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} \end{array} \quad \text{où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(indic pour aller plus vite sur f_8: on pourra étudier l'inversibilité de A)

Exercice 4. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big) = (2x-y, x+3y)$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1}.

Études « concrètes » d'applications linéaires

Exercice 5. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_4) = e_1$$

1. Que vaut l'endomorphisme f^4 ? En déduire que f est un automorphisme, et donner f^{-1}.
2. Déterminer $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$.
3. Pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$, calculer $f^i\left(e_j\right)$. En déduire, sans calcul matriciel, les matrices $\mathrm{M}^2, \mathrm{M}^3, \mathrm{M}^4$.

Exercice 6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ? surjective ?

On note $u = (2,1,-2)$.

2. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(a,1,b)$ tel que $f(v) = u$.
3. Déterminer $w \in \mathbb{R}^3$ de la forme $(c,1,d)$ tel que $f(w) = v$.
4. Montrer que $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice B de f dans cette base (sans utiliser la matrice de passage !).
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u,v)$.
6. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}}$ entre la base canonique et la base $\mathscr{B}$. Donner une relation entre A,B, et P ; la vérifier par le calcul.

Exercice 7. On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $u = (1,-\sqrt{2},1)$, $v = (-1,0,1)$ et $w = (1,\sqrt{2},1)$. On admet que (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathscr{B}$.

1. Justifier que la matrice P est inversible.
2. Sans calculer P^{-1}, montrer que la matrice $P^{-1}JP$ est une matrice diagonale D que l'on explicitera.
3. Calculer J^2, et exprimer J^2 en fonction de I et de K. En déduire que $P^{-1}KP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
4. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.

   (b) En déduire que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$; on admet que $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}$. Retrouver les résultats de la question précédente à l'aide de cette égalité.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\,\mathrm{Id}$.

Plus théorique

Exercice 9. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, non nulle, telle que $f^2 = \widetilde{0}$.

1. Sans calcul : f est-il un automorphisme ?
2. Montrer : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
3. En déduire les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, tels que $u \notin \operatorname{Ker} f$.
   (a) Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
   (b) Montrer que $f(u) \in \operatorname{Ker}(f)$.
   (c) Montrer qu'il existe $v \in \operatorname{Ker}(f)$, non colinéaire à $f(u)$.
   (d) Montrer que $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 10. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que $g \circ f = \widetilde{0} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 11. Soit f un endomorphisme. Démontrer :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\}$$

Exercice 12 (Noyaux itérés)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{N}_p = \operatorname{Ker}\left(f^p\right)$ et $\mathrm{I}_p = \operatorname{Im}\left(f^p\right)$.

1. Préciser les sev N_0 et I_0.
2. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N}_p \subset \mathrm{N}_{p+1}$, et $\mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p$.
3. En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N}_m = \mathrm{N}_{m+1}$.
4. Montrer alors que : $\forall n \geqslant m,\ \mathrm{N}_n = \mathrm{N}_m$.
5. Montrer que : $\forall n \geqslant m,\ \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_m$.

Indications