Corrigé Ex 11, 12, 13

Ex 11

$$g\circ f = \tilde{0} \iff \forall x \in E, (g\circ f)(x) = 0$$
$$\iff \text{—}, \ g(f(x)) = 0$$
$$\iff \forall x \in E, \ f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$$
$$\iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

(car $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in E$)!

Ex12

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sev, donc $0_E \in \mathrm{Im} f$
$0_E \in \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow 0_E \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$:

Alors : * $\exists y$ tq $x = f(y)$

et : * $f(x) = 0_E$

d'où $f(f(y)) = 0_E \iff f^2(y) = 0_E$

et on a alors $\underline{y \in \mathrm{Ker}(f^2)}$.

Or, par hypothèse, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(y) = 0_E$.

— $\underline{\underline{x = 0_E}}$

Final^t, 0_E est le seul élément de $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

$\equiv$ Supposons $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$. 2

* si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$

$\iff f^2(x) = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ [NB : vrai en général !]

* si $\underline{x \in \mathrm{Ker}(f^2)}$, $f^2(x) = 0_E$.

On écrit alors : $f(f(x)) = 0_E$

et si on pose $y = f(x)$: $y \in \mathrm{Im}(f)$ par définition

$y \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f(y) = 0$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$

Or $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$!!

On conclut $y = 0_E$ puis $f(x) = 0_E$ donc $\underline{x \in \mathrm{Ker} f}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker} f$

et finalement : $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Ex 13 :

1) $N_0 = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E) = \{0\}$ car Id_E automorphisme.

$I_0 = \mathrm{Im}(f^0) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E) = E$

2) • Soit $x \in N_p$:

on a $f^p(x) = 0$ d'où $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow x \in N_{p+1}$

Final^t : $\boxed{N_p \subset N_{p+1}}$

• Soit $x \in I_{p+1}$: $\exists y \in E$ tq $x = f^{p+1}(y)$

Mais alors $x = f^p(f(y)) \in \mathrm{Im}(f^p)$

$\Rightarrow x \in I_p$.

Final^t : $\boxed{I_{p+1} \subset I_p}$

3) Supposons : $\forall m \in \mathbb{N}$, $N_m \neq N_{m+1}$

Comme $N_m \subset N_{m+1}$ on a forcém^t $\dim(N_m) < \dim(N_{m+1})$

(sinon on aurait égalité par inclusion et égalité des dimensions !)

La suite des $\dim(N_m)$ est alors une suite d'entiers strict^t croissante, donc tend vers $+\infty$ pour $m \to +\infty$.

On c'est impossible, car tous les N_m sont des sev de E,

et donc $\dim(N_m) \leq \dim(E)$.

On a donc montré : $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $N_m = N_{m+1}$
par l'absurde

4) On procède par récurrence sur $\underline{\underline{n}}$: $\mathcal{P}(n)$: " $N_n = N_m$ ".

* Init. à $n = m$: $\mathcal{P}(m)$: " $N_m = N_m$ " est évidemment vraie.

* Hérédité.
Soit $n \geq m$ fixé, on suppose $\underline{N_n = N_m}$.

Montrons $N_{n+1} = N_m$

* D'après 2, on a $N_n \subset N_{n+1} \Rightarrow N_m \subset N_{n+1}$

* Soit $x \in N_{n+1} = \ker(f^{n+1})$

On a $f^{n+1}(x) = 0$ d'où $f^n(f(x)) = 0$

donc $f(x) \in \ker(f^n)$

$\Rightarrow f(x) \in N_n = N_m = \ker(f^m)$

$\Rightarrow f^m(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f^{m+1}(x) = 0$

$\Rightarrow x \in N_{m+1} = N_m$ d'après 3°)

$\Rightarrow x \in N_m$ Final^t : $N_{n+1} \subset N_m$

et par double inclus° $\underline{N_m = N_{n+1}}$ d'où l'hérédité
et la conclusion.

5. Si $n \geq m$, on a :

$$x \in I_n \Rightarrow \exists y \text{ tq } f^n(y) = x$$
$$\Rightarrow \text{———} \quad f^m(f^{n-m}(y)) = x$$
$$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(f^m) = I_m$$

d'où $I_n \subset I_m$ (la suite des images décroît).

On a ensuite le théorème du rang sur f^m et f^n :

$$\begin{aligned}\dim(I_n) = \dim(\mathrm{Im}(f^n)) &= \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f^n) \\ &= \dim E - \dim N_n \\ &= \dim E - \dim N_m \quad \text{(q. 4)} \\ &= \dim(I_m)\end{aligned}$$

$I_n \subset I_m$, et $\dim I_n = \dim I_m$

d'où $\boxed{I_n = I_m}$