Exercice 7

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

P est inversible ssi $\mathrm{Ker}(P) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$PX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 & (L_3 - L_1) \\ x = z & (L_2) \\ x + z = 0 & (L_1, \text{ en y injectant } y = 0) \end{cases}$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\iff x = y = z = 0$

d'où : $\boxed{P \text{ est inversible}}$

2. $P^{-1}JP$ s'interprète à l'aide de la formule de chg^t de base.

* Soit f ~~l'~~ canon^t associé à J
* Soit $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$ tq $P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}$ (matrice de passage)

Alors $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, -\sqrt{2}, 1)}_{u}, \underbrace{(-1, 0, 1)}_{v}, \underbrace{(1, \sqrt{2}, 1)}_{w})$ (en lisant les colonnes !)

* Alors : ~~J = Ma~~ $P^{-1}JP = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$.

Il suffit donc de déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$

$f : (x, y, z) \mapsto (y, x+z, y)$ donc $f(u) = (-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$

$\Rightarrow \boxed{f(u) = -\sqrt{2}\, u}$

$$\boxed{f(v) = (0,0,0)}$$

$$f(w) = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}(1, \sqrt{2}, 1) \Rightarrow \boxed{f(w) = \sqrt{2}\, w}$$

Ces 3 calculs montrent que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array} = \underline{\underline{P^{-1} J P}}.$$

3. $$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{J^2 = I + K.}}$$

d'où $K = J^2 - I$.

Alors
$$\begin{aligned} P^{-1} K P &= P^{-1} J^2 P - P^{-1} P \\ &= P^{-1} J^2 P - I \\ &= (P^{-1} J P)^2 - I \end{aligned}$$

$$P^{-1} K P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - I = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

4a. On a clairement : $M = aI + bJ + cK$

d'où
$$P^{-1} M P = a P^{-1} P + b P^{-1} J P + c P^{-1} K P$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} M P = \begin{pmatrix} a - \sqrt{2}b + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a + \sqrt{2}b + c \end{pmatrix}}$$