Exercice 9

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $f^2 = \tilde{0}$ (endo. nul).

1) Si f est un automorphisme, $f^2 = f \circ f$ en est aussi un...
mais $f^2 = \tilde{0}$, qui n'est pas un automorphisme.

$\Rightarrow$ f n'est pas un automorphisme.

2) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists y \in \mathbb{R}^3$, $x = f(y)$

Alors $f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = 0_E$ car f^2 est l'endo. nul.

d'où $x \in \mathrm{Ker} f$.

On a bien montré $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3) D'après le théorème du rang :

$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

et d'après l'inclusion de 2°) $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Il n'y a que 2 possibilités :

* $\dim \mathrm{Im}(f) = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$: exclu car alors f serait nul
* $\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 1 \text{ et } \dim \mathrm{Ker}(f) = 2}$

4) a.

Soient λ_1, λ_2 tq $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) = 0$ (*)

En composant par f :

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 f(u)) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 f(u) + \lambda_2 \underbrace{f^2(u)}_{=0 \text{ car } f^2 = \tilde{0}} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 f(u) = 0$. Or $f(u) \neq 0$ $(u \notin \ker(f))$

donc $\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$

On a alors $\lambda_2 f(u) = 0$ (d'après (*)) ; et par le même argument $\underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u, f(u)) \text{ est libre.}}$

4b. $f(f(u)) = f^2(u) = \underline{\underline{0}}$ car $f^2 = \tilde{0}$ $\boxed{\Rightarrow f(u) \in \ker(f)}$

4c. On a vu que $\dim \ker(f) = 2$.

Si tous les vecteurs de $\ker(f)$ étaient colinéaires à $f(u)$, $\ker(f)$ serait de dim. 1 ...

$\Rightarrow$ $\boxed{\exists v \in \ker(f), (f(u), v) \text{ libre.}}$

d. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tq

$$\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 v = 0_E$$

En appliquant f : $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 \underbrace{f^2(u)}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{f(v)}_{=0 \text{ car } v \in \mathrm{Ker}(f)} = f(0_E) = 0_E$

$$\Rightarrow \lambda_1 f(u) = 0_E \quad , \text{et } f(u) \neq 0_E$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

On a donc $\lambda_2 f(u) + \lambda_3 v = 0_E$.

Mais $(f(u), v)$ est libre (quest° 4c) ; d'où $\boxed{\lambda_2 = \lambda_3 = 0}$

Finalt, $(u, f(u), v)$ est libre.

Elle est de cardinal 3 et dim $(\mathbb{R}^3) = 3$ $\Rightarrow \boxed{(u, f(u), v) \text{ base de } \mathbb{R}^3}$

4e. On calcule les images des vecteurs de base !

$f(u) = \dots = f(u)$!

$= \underline{\underline{0}} \times u + \underline{\underline{1}} \times f(u) + \underline{\underline{0}} \times v$

d'où $\boxed{\mathrm{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$f(f(u)) = 0_E$ d'après 4b

$f(v) = 0_E$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$