ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Concours Blanc n°1
Maths 1
25/11/2024
Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Malus informatique : vous aurez un point de moins sur votre note finale si vous êtes dans au moins l'une de ces situations :

- *Aucune question SQL n'a été traitée sérieusement ;*
- *Aucune question Python de l'exercice 1 n'a été traitée sérieusement ;*
- *Aucune question Python de l'exercice 3 n'a été traitée sérieusement.*

Dans tout le sujet on supposera que les packages Python usuels ont été importés par les commandes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant. Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (positif si le joueur gagne de l'argent, négatif s'il en perd).
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

1. On rappelle qu'en Python, la commande `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel `x`.
   Montrer que si `n` est entier, la condition

   ```
   2*np.floor(n/2) == n
   ```

   est vraie si et seulement si `n` est pair.

2. Compléter le programme suivant pour qu'il simule une partie à n lancers et une probabilité p d'obtenir Pile, et renvoie le gain algébrique du joueur :

```
def jeu(n,p):
    pile = 0
    for ...... :
        if ...... :
            pile = pile + 1
    if .......... :
        g = 10*pile
    else :
        .........
    return g
```

On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de cette partie, que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

3. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{13}{27}$.

4. Montrer que : $\mathrm{G}(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

5. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! » , et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $\mathrm{Y} = (-1)^{\mathrm{X}}$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

6. (a) On note $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{Y}+1}{2}$. Déterminer $\mathrm{Y}(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(\mathrm{A})$.

   (b) Démontrer que : $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = 2\mathbb{P}(\mathrm{A}) - 1$.

7. (a) Donner la loi de X.

   (b) En déduire que l'on a également : $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,

   puis que : $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = (1-2p)^n$.

8. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ en fonction de n et p.

9. Démontrer que
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU } (n \text{ est pair})\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(\mathrm{G}) \leqslant 0$).

10. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(\mathrm{G}) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$.

11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

12. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$

13. Démontrer alors que :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array}\right. \iff p \leqslant \frac{1}{2}$$

14. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.

    (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ème joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

15. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

16. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
    Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.

17. Justifier que : $\mathbb{P}(J \leqslant 100) \leqslant \mathbb{P}(|J - 500| \geqslant 400)$.

18. On donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable J :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(|J - \mathbb{E}(J)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(J)}{\varepsilon^2}$$

    Montrer que $\mathbb{P}(J \leqslant 100) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

19. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

20. Proposer un script Python qui peut être utilisé par le forain pour simuler un grand nombre de journées à 200 clients, avec $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$, et qui affiche le pourcentage de jours pour lesquels son gain est inférieur à 100 euros.
    On s'efforcera d'utiliser la fonction codée en question 2, plutôt que de la coder à nouveau !!

Partie V : Bases de données

Le forain se lance maintenant à l'international : il possède des stands dans différents pays, et il gère une base de données recensant les résultats des parties effectuées. On se place à nouveau dans la situation de la Partie I : $p = \frac{2}{3}$ et $n = 3$.

La base de données contient un tableau **Stands** des stands possédés par le forain, et leur localisation géographique ;

Stands

`id`	`Ville`	`Pays`
1	Paris	France
2	Marseille	France
3	Doha	Qatar
⋮	⋮	⋮

et un tableau **Parties** des résultats de toutes les parties effectuées sur une semaine donnée :

Parties

Jour	Stand	Gain_joueur
Lundi	1	−30
Lundi	2	20
Lundi	4	20
Mardi	2	−10
⋮	⋮	⋮

21. Quels champs doit-on déclarer clé primaire et clé étrangère pour rendre cette base cohérente ?

22. Donner les commandes SQL permettant de créer ces deux tables (on fera attention à l'ordre dans lequel on les exécute !).

23. Donner des requêtes SQL permettant d'afficher :

    (a) La liste des gains positifs effectués par les joueurs au stand 2.

    (b) Toutes les lignes de la table **Parties** concernant les stands situés en France.

    (c) Le gain moyen des joueurs recensés dans cette base de données.

    (d) Si la table est suffisamment grande, quelle valeur doit-on s'attendre à obtenir après exécution de la requête précédente ?

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

2. Soient $e'_1 = (-1,-1,1)$, $e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.

   (a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

   (c) En déduire que M est inversible.

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.

5. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a\, e'_1$.

   (b) Montrer que $g(e'_2) - a\, e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b\, e'_1 + a\, e'_2$.

   (c) Montrer que : $\big(f \circ g\big)(e'_3) = \big(g \circ f\big)(e'_3) = a\, e'_2 + b\, e'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - a\, e'_3 - b\, e'_2$ appartient au noyau de f.

   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction et conclure sur l'objectif de cette partie.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_n^2 \end{cases}$$

On prendra garde au fait que (u_n) n'est donc pas une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose, **dans cette question uniquement, que $a = 3$.**

   Écrire une fonction Python `u` qui prend pour argument en entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de u_n.

2. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

On commence par examiner le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sous des hypothèses particulières. Les questions 3, 4, 5 sont indépendantes les unes des autres, et serviront dans la fin du problème.

3. On suppose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \sqrt{n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et donner sa limite.

4. On suppose maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant k$, $u_n < \sqrt{n}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir du rang k.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En justifiant que : $\forall\, n \geqslant k,\ u_n \leqslant u_k$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Indication : on pourra regarder $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

5. On suppose maintenant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.
   Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n^2 \geqslant \sqrt{n}$; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On revient maintenant au cas général, et on introduit une suite et une série auxiliaires.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(n)$.

   (a) En utilisant la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leqslant n$ (qu'on admettra), montrer que la série de terme général s_n converge. On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n)$ la somme partielle d'indice N de cette série, et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n)$ sa somme.

   (b) On admet : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

   En déduire que : $\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S - S_N \leqslant 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N+1}$.

(c) Écrire une fonction Python `somme` qui prend pour argument un entier $N \geqslant 1$ et calcule $\sum_{k=1}^{N} s_k$.

(d) À partir de quel entier N `somme(N)` renverra-t-il une valeur approchée de S à 10^{-3} près ?

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n)$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, et que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n)$. En déduire la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant 2,\ v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} s_k$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de a et S.

À l'aide de ces outils, on donne maintenant une condition nécessaire et suffisante de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

8. On suppose $\ell < 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_k < 0$. En déduire qu'on est dans le cas de la question 4 ; et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

9. Dans le cas $\ell \geqslant 0$, montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 1$. Conclure sur la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.