ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Concours Blanc n°1
Maths 2
28/11/2024
Durée : 4h

Exercice 1

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme:

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Enfin, on note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n, en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
   (a) Résoudre l'équation $f(u) = 2u$, d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2 . On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (c) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$.
   (a) Exprimer A en fonction des matrices T, P et P^{-1}.
   (b) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
   (c) Calculer P^{-1}.
   (d) Montrer que X_n est égal à la première colonne de A^n.
   En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.
4. Informatique.
   (a) Proposer une fonction Python `suites` qui prend en argument un entier n et renvoie `U,V,W` où $U = [u_0, \dots, u_n]$, $V = [v_0, \dots, v_n]$, $W = [w_0, \dots, w_n]$.
   (b) À l'aide de cette fonction et du package `matplotlib`, compléter le script suivant qui représente graphiquement sur une même figure les termes des suites u, v, w pour $n \in [\![0, 10]\!]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
S=suites( ... )
for s in S:
    plt.scatter( ... , ... )
plt.show()
```

Exercice 2

1. On définit la fonction f par :
$$f(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ensemble de définition, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.
   (b) Calculer $f'(x)$; montrer : $\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$.
   Déterminer le signe de f', les variations de f et le signe de f sur $\mathscr{D}_f$.
   (c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.
   (d) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$.
2. On définit dans cette question la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$$
   (a) En calculant soigneusement $u_n - u_{n+1}$, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$
   (b) En déduire que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
   (c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (d) En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer, ce sera pour plus tard) telle que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$$

Exercice 3

On admet dans cet exercice la formule suivante : pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Soient n et r des entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un jet est $1-x$ et celle d'obtenir Face est x (avec $0 < x < 1$). Les jets sont supposés indépendants.
On pose :

- S_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient Pile au cours des n premiers jets ;
- T_r la variable aléatoire donnant le numéro du jet où on obtient Pile pour la r-ième fois.
- P_n l'événement « obtenir un Pile au n-ième jet de pièce » ,
- F_n l'événement « obtenir un Face au n-ième jet de pièce » .

1. Préciser la loi de S_n. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
2. Préciser la loi de T_1. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
3. On cherche ici à donner la loi de T_r ainsi que son espérance.
   (a) Déterminer $\mathrm{T}_r(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité entre événements :
$$\left(\mathrm{T}_r = k+r\right) = \left(\mathrm{S}_{k+r-1} = r-1\right) \cap \mathrm{P}_{k+r}$$

(c) En déduire :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{T}_r = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k$$

(d) Vérifier que la somme des probabilités des événements $(\mathrm{T}_r = k+r)$, où k appartient à $\mathbb{N}$, est égale à 1.

(e) Montrer :

$$(r+k)\binom{r+k-1}{r-1} = r\binom{r+k}{r}$$

En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{T}_r)$.

4. On se propose ici de retrouver $\mathbb{E}(\mathrm{T}_r)$ par un autre moyen. On note :

- $\mathrm{U}_1 = \mathrm{T}_1$;
- Pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathrm{U}_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$.

(a) Exprimer T_r en fonction des U_i.

(b) Quelles loi suivent les U_i ? (on donnera des éléments de justification). Retrouver $\mathbb{E}(\mathrm{T}_r)$.

5. Programmer une fonction Python `T(r,x)` qui renvoie un tirage de T_r définie comme dans ce problème, pour des valeurs de $x \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$ passées en argument.

On examine maintenant un jeu d'argent utilisant ces tirages.

Soient des réels $a > 0$ et $\lambda > 1$. Un joueur parie de la façon suivante : lors du $i^{\text{ème}}$ jet, il mise la somme a^{i-1} (en euros) et jette la pièce.

- Si Pile sort, il perd sa mise et gagne la somme λa^{i-1}.
- Si Face sort, il perd sa mise.

On note G_n la variable aléatoire égale au gain net du joueur (c'est-à-dire les gains moins les pertes) après son $n^{\text{ième}}$ **succès** (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

6. Programmer une fonction Python `G(n,x,a,lambd)` qui renvoie un tirage de G_n définie comme dans ce problème, pour des valeurs de $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ passées en argument.

7. On suppose **dans cette question** que $a = 1$.

(a) Montrer que $\mathrm{G}_1 = -\mathrm{T}_1 + \lambda$, et calculer l'espérance de G_1.

(b) Plus généralement, exprimer G_r en fonction de λ, r et T_r. En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{G}_r)$.

8. On suppose maintenant que $a > 1$.

(a) En examinant les gains et pertes lors des T_1 premiers lancers, montrer que $\mathrm{G}_1 = -\dfrac{1-a^{\mathrm{T}_1}}{1-a} + \lambda a^{\mathrm{T}_1 - 1}$.

(b) Étudier l'existence des espérances des variables aléatoires a^{T_1} et G_1. Lorsque ces espérances existent, les calculer.

9. Montrer que, sous les mêmes conditions qu'en 8b, $\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_r})$ existe pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer cette espérance.

10. De manière générale, exprimer G_r en fonction de a et des variables $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r$; en déduire $\mathbb{E}(\mathrm{G}_r)$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.

   (b) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

5. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et renvoyant la valeur de u_n.

6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   (b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

   (c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

7. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a : $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

   $$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3: $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
   Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2,3]$.

   (d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

   $$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

   (e) En déduire un code Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.