Exercice 1

Partie 1

1) Si n est pair, $\frac{n}{2}$ est entier, donc $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$

et $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$

Si $n = 2k+1$ est impair, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor k+\frac{1}{2} \rfloor = k$

d'où $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2k \neq n$.

On a bien $\boxed{n \text{ pair} \iff 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n}$

d'où le résultat de la commande Python.

2. On déroule littéralement le protocole expérimental.
On obtient Pile avec proba p : l'évén^t "rd.random() < p" (vrai avec proba p.) codera le fait d'obtenir Pile.
Si le nb de Pile est pair (à tester avec la quest° 1) le gain est 10*Pile
Sinon il est de -10*Pile.

```
def jeu(n,p):
    pile = 0
    for k in range(n):  # nb lancers.
        if rd.random() < p :  # obtenir Pile
            pile = pile + 1
    if 2*np.floor(pile/2) == pile :  # nb pair de Pile : gagnant.
        g = 10*pile
    else:                            # nb impair de Pile : perdant
        g = -10*pile
    return g
```

3. Ici X est le nb de Pile obtenus sur 3 lancers indépendants, avec $p = 2/3$ d'obtenir Pile.

On a donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3)}$

A est l'évènt : "X est pair". Comme $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P(A) = P(X=0) + P(X=2)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$$
(avec $P(X=k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$)
$$= \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{13}{27}}$$

4. Les valeurs possibles du gain se trouvent en regardant les valeurs possibles de X.

Si $X=0$, X est pair donc le joueur gagne : $G = 10X = 0$

Si $X = 1$, — impair — perd : $G = -10X = -10$

2 pair gagne : $G = 10X = 20$

3 impair perd $G = -10X = -30$.

On a donc bien $\boxed{G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}}$

$$P(G=-30) = P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$
$$P(G=20) = P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$
$$P(G=-10) = P(X=1) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$
$$P(G=0) = P(X=0) = (1/3)^3 = 1/27$$

5. On obtient d'après la loi :

$$E(G) = -30\times\frac{8}{27} + 20\times\frac{12}{27} - 10\times\frac{6}{27} + 0\times\frac{1}{27}$$

$$= \frac{-240+240-60}{27}$$

$$\boxed{E(G) = -\frac{60}{27} = -\frac{20}{9}}$$

$E(G)<0$: le jeu n'est pas favorable au joueur.

6a. Y vaut -1 ou 1 suivant la parité de X : $Y(\Omega)=\{-1,1\}$.

Si $Y=-1$, $Z=\frac{Y+1}{2}=0$

Si $Y=1$, $Z=\frac{Y+1}{2}=1$

$\Rightarrow Z(\Omega)=\{0,1\}$: Z est bien une variable de Bernoulli.

Le paramètre de la loi de Z est :

$$P(Z=1) = P\left(\frac{Y+1}{2}=1\right) = P(Y=1) = P((-1)^X=1) = P(X \text{ pair}) = \underline{\underline{P(A)}}$$

On a bien : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))}$

6b. Par linéarité de l'espérance (Hyp. les esp. existent car on a des lois à support fini)

$$E(Z) = \frac{E(Y)+1}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{E(Y) = 2E(Z)-1 = 2P(A)-1}$ car $\underline{\underline{Z\hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))}}$

7a. Comme dans la question 3 : $\underline{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

7b. $Y = (-1)^X$ donc d'après le théorème de transfert :

$$E(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et on reconnaît un binôme de Newton :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (-p+1-p)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y) = (1-2p)^n}$$

8. On égale les expressions de 6b et 7b :

$$E(Y) = 2P(A) - 1 = (1-2p)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1+(1-2p)^n}{2}}$$

9. On voit d'après l'express° ci-dessus que :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff (1-2p)^n \geq 0.$$

Or $(1-2p)^n \geq 0 \iff n$ pair ou $1-2p \geq 0$ ("ou" inclusif)

$$\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2}$$

On a bien $\boxed{P(A) \geq \frac{1}{2} \iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2}}$

Partie III

10. $G = 10X$ si X est pair ; et $G = -10X$ si X est impair.

Donc $G = 10\times(-1)^X X = 10XY$

Par transfert : $E(G) = E\left(10.(-1)^X X\right)$

$$\boxed{E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \, P(X=k)}$$

11. Classique !

$$k\binom{n}{k} = k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$n.\binom{n-1}{k-1} = n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

d'où l'égalité.

12. On injecte ds la somme de la quest° 10 :

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

le terme $k=0$ est nul.

$$= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n.\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

chg^t d'indice $k \to k-1$

$$= 10n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= -10np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$\boxed{E(G) = -10np\,(-p+1-p)^{n-1} = -10np(1-2p)^{n-1}}$$

13. • Si $p \leq \frac{1}{2}$, on a $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$ d'après 9 ;

et $1-2p \geqslant 0$ donc $E(G) = -10np\underbrace{(1-2p)^{n-1}}_{\geqslant 0} \leq 0$.

• Si $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$

alors $p \leq \frac{1}{2}$ ou n est pair.

Mais si $p > \frac{1}{2}$, alors forcément n est pair, donc $n-1$ est impair.

Et dans ce cas $E(G) = \underbrace{-10np}_{<0}\underbrace{(\underbrace{1-2p}_{<0})^{n-1}}_{<0} > 0$: contradiction.

On a donc bien $p \leq \frac{1}{2}$

Ainsi $\boxed{\left(P(A) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } E(G) \leq 0\right) \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2}}$

14a. $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x(1-2x)^{n-1}$

f est dérivable car polynômiale.

$\forall x \in [0, 1/2]$, $f'(x) = (1-2x)^{n-1} + x(n-1)(-2)(1-2x)^{n-2}$

$= (1-2x)^{n-2}\left((1-2x) - 2(n-1)x\right)$

$= (1-2x)^{n-2}(1 - \cancel{2x} - 2nx + \cancel{2x})$

$\boxed{f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx)}$

Sur $[0, 1/2]$, $1-2x \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2nx \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leq 1/2n$

d'où le tableau :

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

f est donc maximale en $x = 1/2n$.

Pour optimiser sa rentabilité, $E(G)$ doit être minimale

Or $E(G) = -10n \times f(p)$ donc il faut prendre p qui maximise f.

Le forain doit donc choisir $\boxed{p = \frac{1}{2n}}$

15. Avec $n=2$ et $p = 1/4$.

$X=0$ avec proba $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ $\longrightarrow$ ds ce cas $G=0$

$X=1$ avec proba $2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ $\longrightarrow$ " $G=-10$

$X=2$ avec proba $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1/16$ $\longrightarrow$ " $G=20$.

La loi de G_i est donc :

k	0	-10	20
$P(G_i=k)$	$9/16$	$3/8$	$1/16$

$E(G_i) = -10np(1-2p)^{n-1}$ (q 12) avec $n=2$, $p=1/4$.

$E(G_i) = -10\times2\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{4} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$

$E(G_i^2) = 0\times\frac{9}{16} + 100\times\frac{3}{8} + 400\times\frac{1}{16} = \frac{1000}{16} = \frac{500}{8}$

$= \frac{250}{4}$

$E(G_i^2) = \frac{125}{2}$

et donc $V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2$

$$= \frac{125}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{250}{4} - \frac{25}{4} \qquad \Rightarrow \boxed{V(G_i) = \frac{225}{4}}$$

(oui, ce sont des choses qui arrivent...)

16 le gain du forain sur la journée est l'opposé du gain des 200 joueurs...

d'où $J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$

On en déduit $E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

$$\boxed{E(J) = 500}$$

et $V(J) = (-1)^2 \, V\left(\sum_{i=1}^{200} G_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{200} V(G_i)$ par indép. mutuelle des G_i

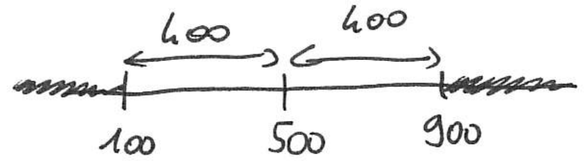
$= 200 \times \frac{225}{4} = 50 \times 225 = \frac{100 \times 225}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{V(J) = 11250}$$

11°

17. Sur les év^{ts} : $|J - 500| \geq 400 \iff J \geq 900$ ou $J \leq 100$

(val.abs = distance !!)



$\sim$ = valeurs de J

d'où $|J-500| \geq 400 = (J \geq 900) \cup (J \leq 100)$

disjointe

et $\boxed{P(|J - 500| \geq 400) = P(J \geq 900) + P(J \leq 100) \geq P(J \geq 100)}$

18. $E(J) = 500$, ça tombe bien.

Avec $\varepsilon = 400$:

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2}$$

$$\Rightarrow P(J \leq 100) \leq \frac{11250}{160\,000} = \frac{9}{128}$$

ici il vaut mieux admettre, vous prendrez 1/2 pt mais gagnerez 15 min !

19. Avec une proba $p \leq \frac{9}{128} \leq \frac{10}{100}$ le forain gagnera − de 100€/jour ;

donc ~~avec~~ $\boxed{\text{il peut installer son stand}}$

20. On peut choisir le "grand nombre de journées" égal à 10000 :

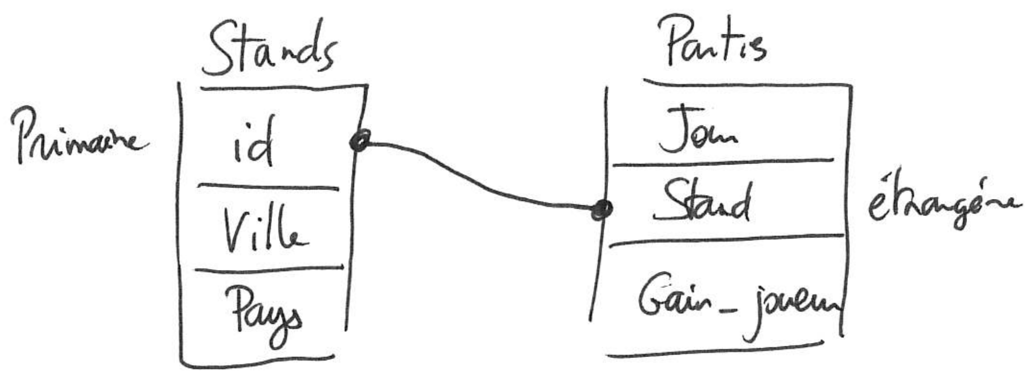
~~for k in range (10000): # 10000 jours~~
~~for c in range (200): # 200 clients par jour~~

```
c=0            # comptera les jours où J ≤ 100
for k in range (10000) :      # 10000 jours.
    j=0
    for i in range (200) :    # 200 clients / jour
        j = j - jeu (2, 1/4)      # attent°, J = − ΣGi
    if j <= 100 :
        c = c+1
print (c/10000)    # proport° de jours où j ≤ 100.
```

Partie V

21. Ds la table Stands, le champ id identifie un stand de manière non ambiguë : c'est 1 clé primaire

Ds la table Parties le champ Stand prend les valeurs des identifiants des stands : c'est une clé étrangère pointant vers la clé primaire



22. On commence par créer la clé primaire avant de pointer la clé étrangère dessus !

```
CREATE TABLE Stands(
  id INTEGER PRIMARY KEY,
  Ville TEXT,
  Pays TEXT )
```

puis

```
CREATE TABLE Partis(
 Jour TEXT,
 FOREIGN KEY Stand REFERENCES Stands.id,
 Gain_Joueur INTEGER )
```

23. a.
```
SELECT Gain_Joueur
FROM Stands
WHERE Gain_Joueur > 0 AND Stand = 2
```

b. Jointure !

```
SELECT (Jour, Stand, Gain_Joueur)
FROM Stands INNER JOIN Parties ON Stands.Id = Parties.Stand
WHERE Pays = 'France'
```

c.
```
SELECT AVG(Gain_Joueur)
FROM Parties.
```

d. Sur un gd nb de parties, la moyenne des résultats observés est 1 approximat° de l'espérance de la v.a. associée.
La valeur sera proche de $E(G) = -\frac{20}{9}$ (9.5)

Exercice 2

Partie A

1a. Attent° au $1/3$!!

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis : $$A^3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0_{M_3(\mathbb{R})}}}.$$

~~1b~~. Si f était un autom. de $\mathbb{R}^3$, f^3 en serait égal^t un ... mais $f^3 = \tilde{0}$
(car sa matrice, M^3, est nulle)

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$

1b. $f : (x,y,z) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y+z, -x-y-2z, x+y+2z)$

On a : $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ identiques

$$\iff \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \oplus$$

$$\iff \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2y+z \\ z=-y \end{cases} \iff x=y,\ z=-y$$

d'où $Ker(f) = \{(y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{Ker(f) = Vect\big(\underbrace{(1, 1, -1)}_{\text{1 vecteur non nul : base de } Ker(f)}\big)}$$

et $\boxed{\dim(Ker(f)) = 1}$

2a. On examine la liberté de cette famille :

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est libre, de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{C'est une base de } \mathbb{R}^3}$

2b. $f(e'_1) = \frac{1}{3}(1 - 2 + 1, 1 + 1 - 2, -1 - 1 + 2) = (0, 0, 0)$

$f(e'_2) = \frac{1}{3}(-2 - 2 + 1, -2 + 1 - 2, 2 - 1 + 2) = \frac{1}{3}(-3, -3, 3) = (-1, -1, 1) = \underline{\underline{e'_1}}$

$f(e'_3) = \frac{1}{3}(1 + 4 + 1, 1 - 2 - 2, -1 + 2 + 2) = \frac{1}{3}(6, -3, 3) = (2, -1, 1) = \underline{\underline{e'_2}}$

d'où

$$\boxed{Mat(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}}$$

3a. $M = \alpha A + \beta I$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{3}} \left(\alpha \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \right)$$

⚠ à cause du 1/3 en facteur !!

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = -\alpha + 3\beta \\ -2 = 2\alpha \\ -1 = \alpha \\ \vdots \end{array}\right\} \to \text{donner } \underline{\alpha = -1, \text{ et } \beta = 1}$$

→ on vérifie ensuite que ça marche aussi pour les autres coeff.

$$\Rightarrow \boxed{M = -A + I}$$

3b. $M = Mat(h, B)$
$A = Mat(f, B)$

donc $M = -A + I \Rightarrow \underline{\underline{h = -f + Id_{\mathbb{R}^3}}}$

et par suite $M' = Mat(h, B') = -Mat(f, B') + I_3$
$= -T + I_3$

$$\Rightarrow \boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3c. M' est inversible (triangulaire, ts coeff diag $\neq 0$)
donc $\underline{h \text{ est 1 automorphisme de } \mathbb{R}^3}$
donc $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

Partie B

4. Si $V^2 = T$, $VT = V^3$ et $TV = V^3$ donc $\boxed{VT = TV.}$

~~On $VT = \mathrm{Mat}(go$~~

On $V = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}')$ donc $VT = TV \iff \boxed{f \circ g = g \circ f}$
$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$

5a. Il faut vérifier que $f(g(e'_1)) = 0$

g linéaire

On $f(g(e'_1)) = (f \circ g)(e'_1) = (g \circ f)(e'_1) = g(\underbrace{f(e'_1)}_{=(0,0,0)}) = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ On a bien $\boxed{g(e'_1) \in \mathrm{Ker}(f)}$

Or on a vu que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e'_1)$ (1b).

d'où : $\exists a \in \mathbb{R}$, $g(e'_1) = a e'_1$

5b C'est reparti :

$$f(g(e'_2) - a e'_2) = (f \circ g)(e'_2) - a f(e'_2)$$
$$= g(\underbrace{f(e'_2)}_{=e'_1}) - a e'_1$$
$$= g(e'_1) - a e'_1 = (0,0,0) \text{ d'après 5a}$$

Par le m̄ argument : $\boxed{\exists b \in \mathbb{R},\ g(e'_2) - a e'_2 = b e'_1}$

5c ..... et encore !

$$f\left(g(e_3') - a e_3' - b e_2'\right)$$
$$= g\left(f(e_3')\right) - a f(e_3') - b f(e_2')$$
$$= g(e_2') - a e_2' - b e_1' = (0,0,0) \quad (5b)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow g(e_3') - a e_3' - b e_2' \in \ker f \\ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ g(e_3') - a e_3' - b e_2' = c e_1' \end{array}}$$

5d. On récapitule : $g(e_1') = a e_1'$
$g(e_2') = a e_2' + b e_1'$
$g(e_3') = a e_3' + b e_2' + c e_1'$

d'où $\boxed{\mathrm{Mat}(g, B') = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} = V.$

6. Avec cette matrice :

$$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Si $V^2 = T$, on déduit $a^2 = 0$ (d'où $a = 0$)
et $2ab = 1$: absurde car $a = 0$!

$\boxed{\text{Il n'existe pas de } V \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } V^2 = T \text{ donc pas de } g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ tq } g \circ g = f}$

Exercice 3

$$\begin{cases} u_1 = a & (a>0) \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

1. Attent° c'est un peu plus fin que d'habitude !

```
def u(n):
    u = 3        # u_1
    k = 1        # le rang du terme de la suite
    for k in range(n-1):    # boucler n-1 fois !
        u = u**2 / np.sqrt(k)
        k = k+1
    return u
```

2. • $u_1 = a > 0$ d'après l'énoncé

• si $u_n > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} > 0$ clairem^t.

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.}$

3. (u_n) est à termes > 0 donc on peut étudier la monotonie via $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1$ par hypothèse : $(u_n) \nearrow$.

De plus $u_n \geq \sqrt{n}$, et $\sqrt{n} \to +\infty$: par minorat° $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

4a Soit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n < \sqrt{n}$"

* $\mathcal{P}(k)$ vraie par hypothèse.
* si $u_n < \sqrt{n}$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$

d'où l'hérédité.

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \geqslant k, \quad u_n < \sqrt{n}}$$

4b. $\forall n \geqslant k$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} < 1$ d'après 4a.

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n)_{n \geqslant k} \text{ est décroissante}}$

4c. (u_n) est ↓ à partir du rang k ; minorée par 0 (9.2)

donc converge

Par décroissance on a clairement $\forall n \geqslant k$, $u_n \leq u_k$

Alors : $\forall n \geqslant k, 0 < u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_k^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (u_k est fixe !)

Par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0$

et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

5. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geqslant 1 \iff u_n^2 \geqslant \sqrt{n}$; d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$

et comme $u_n > 0$ on en déduit en passant à la racine carrée : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

6a.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n) \leq n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ cv car série géo dérivée, $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

Par comparaison de SATP :

$$\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{2^{n+1}} \text{ converge.}}$$

6b. ~~$\ln(n) \leq n$ ... il suffirait que $n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.~~

~~Or : $n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \iff \ln(n) \leq n \ln\left(\frac{3}{2}\right)$~~

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S - S_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(k)}{2^{k+1}}}_{\geq 0} \geq 0$.

de plus : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S - S_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(3/4)^{N+1}}{1 - 3/4}$$

$$= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}$$

On trouve bien :

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{0 \leq S - S_N \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}}$

6c. On peut aller vite :

```
def somme(n):
    return np.sum([np.log(k)/(2**(k+1)) for k in range(1, n+1)])
```

4

6d.

En vertu de 6b, S_N approche S à ε près si on trouve N tq

$$0 \leq S - S_N \leq \underbrace{2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}} \leq \varepsilon$$

donc il faut résoudre $2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1} \leq 10^{-3}$

$$\Leftrightarrow \ln(2) + (N+1)\ln(3/4) \leq -3\ln(10)$$

NB: ~~ln~~ rival

$$\Leftrightarrow (N+1)\underbrace{\ln(3/4)}_{<0} \leq -3\ln(10) - \ln(2)$$

<0, attent° !

$$\Leftrightarrow \boxed{N+1 \geq \frac{-3\ln(10) - \ln(2)}{\ln(3/4)}}$$

$$\Leftrightarrow N \geq \frac{-3\ln(10) - \ln(2)}{\ln(3/4)} - 1.$$

Il suffit alors de choisir $\boxed{N = \left\lfloor \frac{-3\ln(10) - \ln(2)}{\ln(3/4)} - 1 \right\rfloor + 1}$

7a. D'après la quest° 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

donc $v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n)$ est bien défini.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n) - \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n^2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \cancel{} - \frac{1}{2^n}\left(\cancel{2\ln(u_n)} - \frac{1}{2}\ln(n)\right)$$

$$\boxed{v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n)}$$

Avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a clairement

$v_n - v_{n+1} \geq 0$: $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$

7b. On a vu : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k - v_{k+1} = S_k$

En sommant : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$

$$\Rightarrow \quad v_1 - v_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} S_k}$$

Or $\sum S_k$ converge :

donc (v_n) cv et $\lim_{n\to+\infty} v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{+\infty} S_k$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = a - S}$$

8. Si $\ell < 0$: $\lim_{k\to+\infty} v_k = \ell$ donc $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $v_k < 0$.

mais $v_k < 0 \iff \frac{1}{2^{k-1}} \ln(u_k) < 0$

$\iff \ln(u_k) < 0$

$\iff u_k < 1 < \sqrt{k}$: on est bien ds le cas de la q. 4

et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

9. Si $\ell \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \geq 0$ et $(v_n) \searrow$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après q 5.