Concours Blanc n°1
Maths 2
Corrigé

Exercice 1

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme:

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$**. Enfin, on note** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

1. (a) **Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.**
   Produit matriciel sans difficulté :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - v_n + w_n \\ u_n + 2v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

   (b) **En déduire l'expression de X_n, en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.**

   « C'est comme une suite géométrique » ... mais ce formalisme est réservé aux suites réelles. Ici **il faut démontrer :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. Récurrence sans aucune difficulté.

2. **On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.**

   (a) **Résoudre l'équation $f(u) = 2u$, d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$.**

   Par définition de f :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ f\big((x, y, z)\big) = (3x - y + z, x + 2y, y + z)$$

   On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ x + 2y = 2y \\ y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

   $\mathscr{S} = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$.

   (b) **Déterminer une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :**

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2. On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').
   Il faut lire dans la matrice les conditions demandées sur la base $\mathscr{B}'$: la matrice de f dans cette base sera égale à T ssi on a :

$$f(e_1') = 2e_1' \ ; \ f(e_2') = e_1' + 2e_2' \ ; \ f(e_3') = e_2' + 2e_3'$$

D'après la question précédente, e'_1 est de la forme $(0, y, y)$; avec la contrainte demandée :

$$e'_1 = (0,1,1)$$

On cherche ensuite $e'_2 = (x, y, -1)$ tel que $f((x, y, -1)) = (0,1,1)+2(x, y, -1)$; ceci mène à un système en x et y et on trouve

$$e'_2 = (1,0,-1)$$

On cherche ensuite $e'_2 = (a, b, 2)$ tel que $f((a, b, 2)) = (1,0,-1)+2(a, b, 2)$; ceci mène à un système en a et b et on trouve

$$e'_3 = (0,1,2)$$

(c) **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$**.**

C'est une récurrence sans difficulté particulière.

3. **Soit** P **la matrice de passage de la base canonique à la base** $\mathscr{B}'$**.**

(a) **Exprimer** A **en fonction des matrices** T, P **et** P^{-1}**.**

Par formule du changement de base, $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

(b) **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$**.**

Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ (vue en TD).

(c) **Calculer** P^{-1}**.**

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout un système linéaire :

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ x + z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b - c \\ y = a \\ z = a - b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui forunit $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) **Montrer que** X_n **est égal à la première colonne de** A^n**.**
En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n **en fonction de** n**.**

On a vu que $\mathrm{X}^n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$, avec $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on voit que si on multiplie une matrice M quelconque par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient comme résultat la 1ère colonne de M.
On déduit bien que X_n est la 1ère colonne de A^n.

Il nous faut donc maintenant calculer la première colonne de A^n.

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n+1} & \dots & \dots \\ n(n+3)2^{n-3} & \dots & \dots \\ n(n-1)2^{n-3} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(NB : pour optimiser, calculer toutes les composantes de PT^n (par exemple) , puis ne calculer que la première colonne de $(\mathrm{PT}^n)\mathrm{P}^{-1}$; sur une copie vous pouvez bien entendu mettre des ... ailleurs comme je le fais ici.)

4. **Informatique.**

   (a) **Proposer une fonction Python `suites` qui prend en argument un entier n et renvoie `U,V,W` où $\mathrm{U} = [u_0, \dots, u_n]$, $\mathrm{V} = [v_0, \dots, v_n]$, $\mathrm{W} = [w_0, \dots, w_n]$.**

   On remplit des listes initialement mises à 0, de proche en proche :

```
def suites(n):
    U = np.zeros(n+1)
    V = np.zeros(n+1)
    W = np.zeros(n+1)
    U[0]=1 # valeur de u0 ; v0 et w0 valent 0
    for k in range(1,n+1):
        U[k] = 3*U[k-1]-V[k-1]+W[k-1]
        V[k] = U[k-1]+2*V[k-1]
        W[k] = V[k-1]+W[k-1]
    return U,V,W
```

   (b) **À l'aide de cette fonction et du package `matplotlib`, compléter le script suivant qui représente graphiquement sur une même figure les termes des suites u, v, w pour $n \in [\![0, 10]\!]$.**

```
import matplotlib.pyplot as plt
S=suites(10)
for s in S:
    plt.scatter(np.arange(11),s)
plt.show()
```

   Ici `s` vaudra successivement `U`, `V`, puis `W` : on effectue 3 commandes `plt.scatter` avec une liste d'abscisses `np.arange(11) = [0,...,10]` et une liste d'ordonnées égale à `U`, puis `V`, puis `W`. On obtiendra bien les 3 tracés demandés.

Exercice 2

1. **On définit la fonction f par :**

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x$$

   (a) **Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ensemble de définition, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.**

   L'expression donnant $f(x)$ est définie dès que $1 + x > 0$; d'où $\mathscr{D}_f =]-1, +\infty[$.
   Sur cet intervalle, f est $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.

   (b) **Calculer $f'(x)$; montrer : $\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$.**
   Déterminer le signe de f', les variations de f et le signe de f sur $\mathscr{D}_f$.

   En dérivant un produit pour le premier terme :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{x+2}{2(1+x)} - 1$$

   puis

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1+x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2}$$

   On en déduit les tableaux de variation et de signe suivants :

x	-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(c) **Montrer :** $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.

On a $f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$ sur $\mathscr{D}_f$. Pour $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 1$ donc $(1+x)^2 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{2(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$; et en multipliant par $x \geqslant 0$ on trouve bien $f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.

(d) **En déduire :** $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$.

D'après le tableau de signes de f : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geqslant 0$.

D'autre part : si x est positif, on a, pour tout $t \in [0,x]$, $f''(t) \leqslant \dfrac{t}{2}$; on peut donc intégrer cette inégalité sur $[0,x]$ et obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\ f'(x) - f'(0) &\leqslant \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x\\ f'(x) &\leqslant \frac{x^2}{4}\end{aligned}$$

On intègre à nouveau l'inégalité $f'(t) \leqslant \dfrac{t^2}{4}$ sur $[0,x]$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^x \frac{t^2}{4}\,\mathrm{d}t\\ f(x) - f(0) &\leqslant \left[\frac{t^3}{12}\right]_0^x\\ f(x) &\leqslant \frac{x^3}{12}\end{aligned}$$

2. **On définit dans cette question la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$$

(a) **En calcula nt soigneusement $u_n - u_{n+1}$, démontrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\,\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\,e^{n+1}}\right)$$

On ne panique pas et on essaie de réorganiser ce gros quotient pour faire apparaître des simplifications :

$$\begin{aligned}\frac{n!\,e^n(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}(n+1)!\,e^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \times \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times (n+1) \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{e} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times (n+1) \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \frac{1}{e} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\end{aligned}$$

d'où

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{e} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Par ailleurs, $nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = n\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1$: on obtient bien la même expression.

(b) **En déduire que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.**

Cette série est donc aussi la série $\sum nf\left(\frac{1}{n}\right)$. C'est une série à termes positifs car f est positive sur $\mathbb{R}_+$; de plus on sait que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant \frac{x^3}{12}$; d'où en appliquant en $x = \frac{1}{n}$ (qui est bien positif) puis en multipliant par $n > 0$:

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

Le terme général de la série qui nous occupe est donc majoré par le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de SATP, $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge.

(c) **Quelle est la nature de la suite (u_n) ?**

Classiquement, une suite a même comportement que sa série téléscopique associée, donc on vient de voir la convergence.

Si on veut le redémontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un téléscopage donne

$$u_0 - u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$$

Le terme de droite admet une limite finie pour $n \to +\infty$ car ce sont les sommes partielles d'une série convergente ; donc celui de gauche aussi, et (u_n) admet bien une limite finie.

(d) **En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que :**

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$$

Notons donc $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a donc par passage à l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} = e^a$$

On note alors $C = e^a > 0$; on peut reformuler cette dernière limite avec l'équivalent :

$$\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C$$

et après multiplication par $\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$ (opération légitime sur les équivalents) on arrive bien à

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$$

Exercice 3

On admet dans cet exercice la formule suivante : pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Soient n et r des entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un jet est $1-x$ et celle d'obtenir Face est x (avec $0 < x < 1$). Les jets sont supposés indépendants.
On pose :

- S_n **la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient Pile au cours des n premiers jets ;**
- T_r **la variable aléatoire donnant le numéro du jet où on obtient Pile pour la r-ième fois.**
- P_n **l'événement « obtenir un Pile au n-ième jet de pièce » ,**
- F_n **l'événement « obtenir un Face au n-ième jet de pièce » .**

1. **Préciser la loi de S_n. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.**

   Les jets étant indépendants, on est en présence d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de « succès » (obtenir Pile) égale à $1-x$; S_n compte le nombre de ces succès.
   D'après le cours on a donc $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-x)$.
   Toujours d'après le cours, on obtient $E(S_n) = n(1-x)$ et $V(S_n) = n(1-x)(1-(1-x)) = nx(1-x)$.

2. **Préciser la loi de T_1. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.**

   T_1 est le temps d'attente du 1[er] Pile ; par indépendance des lancers on a $T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(1-x)$.
   On en déduit $E(T_1) = \dfrac{1}{1-x}$ et $V(T_1) = \dfrac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

3. **On cherche ici à donner la loi de T_r ainsi que son espérance.**

   (a) **Déterminer $T_r(\Omega)$.**
   Le r-ème Pile arrive au plus tôt au lancer r ; et peut arriver arbitrairement tard. Ainsi :

   $$T_r(\Omega) = [\![r, +\infty [\![$$

   (b) **Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité entre événements :**

   $$\big(T_r = k+r\big) = \big(S_{k+r-1} = r-1\big) \cap P_{k+r}$$

   L'événement $(T_r = k+r)$ est réalisé ssi le r-ème Pile arrive au $(k+r)$-ème lancer ; soit ssi il y a $r-1$ Pile dans les $(k+r-1)$ premiers lancers (ce qui est exactement l'événement $(S_{k+r-1} = r-1)$), et un Pile au $(k+r)$-ème (ce qui donne l'événement P_{r+k}).
   On a donc bien $\big(T_r = k+r\big) = \big(S_{k+r-1} = r-1\big) \cap P_{k+r}$.

   (c) **En déduire :**

   $$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_r = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k$$

   L'événement $(S_{k+r-1} = r-1)$ concerne les $(k+r-1)$ premiers lancers ; il est donc indépendant de l'événement P_{k+r}. Ainsi :

   $$P(T_r = k+r) = P(S_{k+r-1} = r-1) \times P(P_{k+r})$$

   En utilisant la loi de S_{k+r-1} :

   $$P(S_{k+r-1} = r-1) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1}x^{(k+r-1)-(r-1)} = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1}x^k$$

   et avec $P(P_{r+k}) = (1-x)$ on trouve :

   $$P(T_r = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k$$

   (d) **Vérifier que la somme des probabilités des événements $(T_r = k+r)$, où k appartient à $\mathbb{N}$, est égale à 1.**

   $$\begin{aligned}
   \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_r = k+r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k \\
   &= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k \\
   &= (1-x)^r \frac{1}{(1-x)^r} \quad \text{en appliquant la formule admise à l'entier } r-1 \in \mathbb{N} \\
   &= 1
   \end{aligned}$$

(e) **Montrer :**

$$(r+k)\binom{r+k-1}{r-1} = r\binom{r+k}{r}$$

En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{T}_r)$**.**

En utilisant la formule définissant les coefficients binomiaux :

$$(r+k)\binom{r+k-1}{r-1} = (r+k)\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!} = \frac{(r+k)!}{(r-1)!k!}$$

et

$$r\binom{r+k}{r} = r\frac{(r+k)!}{r!k!} = \frac{(r+k)!}{(r-1)!k!}$$

ce qui donne bien l'égalité recherchée.

Alors $\mathrm{E}(\mathrm{T}_r)$ est donnée, sous réserve de convergence absolue, par la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)\mathrm{P}(\mathrm{T}_r = k+r) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)\binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1}x^k \times (1-x) \\
&= (1-x)^r\sum_{k=0}^{+\infty} r\binom{r+k}{r}x^k \quad \text{d'après la formule précédente} \\
&= r(1-x)^r\frac{1}{(1-x)^{r+1}} \quad \text{d'après la formule admise par l'énoncé} \\
&= \frac{r}{1-x}
\end{aligned}$$

On a bien la convergence absolue car c'est une SATP, qui converge en vertu de la formule admise par l'énoncé.

4. **On se propose ici de retrouver** $\mathrm{E}(\mathrm{T}_r)$ **par un autre moyen. On note :**

   - $\mathrm{U}_1 = \mathrm{T}_1$ **;**
   - **Pour tout** $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathrm{U}_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$**.**

   (a) **Exprimer** T_r **en fonction des** U_i**.**

   Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $\mathrm{T}_r = (\mathrm{T}_r - \mathrm{T}_{r-1}) + (\mathrm{T}_{r-1} - \mathrm{T}_{r_2}) + \cdots + (\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) + \mathrm{T}_1 = \mathrm{U}_r + \cdots + \mathrm{U}_1$.

   (b) **Quelles loi suivent les** U_i **? (on donnera des éléments de justification). Retrouver** $\mathrm{E}(\mathrm{T}_r)$**.**

   Pour $i \geqslant 2$, U_i est le temps d'attente d'un nouveau succès (temps entre le $(i-1)$-ème et le i-ème, donc suit $\mathscr{G}(1-x)$. De même pour $\mathrm{U}_1 = \mathrm{T}_1$ (déjà montré).

   On en déduit, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_r) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{r}\mathrm{U}_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\mathrm{E}(\mathrm{U}_i) = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{1-x} = \frac{r}{1-x}$$

5. **Programmer une fonction Python** `T(r,x)` **qui renvoie un tirage de** T_r **définie comme dans ce problème, pour des valeurs de** $x \in]0,1[$ **et** $r \in \mathbb{N}^*$ **passées en argument.**

   On peut proposer :

```python
def T(r,x):
    lancers = 0 # compte les lancers
    piles = 0 # compte les Pile
    while piles < r :
        if rd.random() < 1-x: # le lancer donne Pile
            piles = piles+1
        lancers = lancers+1
    return lancers
```

On examine maintenant un jeu d'argent utilisant ces tirages.
Soient des réels $a > 0$ et $\lambda > 1$. Un joueur parie de la façon suivante : lors du $n^{\text{ième}}$ jet, il mise la somme a^{n-1} (en euros) et jette la pièce.

- **Si Pile sort, il perd sa mise et gagne la somme λa^{n-1}.**
- **Si Face sort, il perd sa mise.**

On note G_n la variable aléatoire égale au gain net du joueur (c'est-à-dire les gains moins les pertes) après son $n^{\text{ième}}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

6. **Programmer une fonction Python `G(n,x,a,lambd)` qui renvoie un tirage de G_n définie comme dans ce problème, pour des valeurs de $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ passées en argument.**

7. **On suppose dans cette question que $a = 1$.**

   (a) **Montrer que $G_1 = -T_1 + \lambda$, et calculer l'espérance de G_1.**
   On suppose que $T_1 = n$. Le premier Pile arrive au n-ème jet, ce qui signifie que le joueur a perdu sa mise de 1 euro lors des n premiers lancers (donc gain net $= -n$) et a gagné λ au n-ième lancer.
   Au total le gain net est donc $G_1 = \lambda - n$.
   On a bien montré que $G_1 = \lambda - T_1$.

   Par linéarité de l'espérance on obtient donc $E(G_1) = \lambda - E(T_1) = \lambda - \dfrac{1}{1-x}$.

   (b) **Plus généralement, exprimer G_r en fonction de λ, r et T_r. En déduire $E(G_r)$.**
   Au r-ème succès, la situation est la suivante :
   - Le joueur a perdu T_r fois sa mise de 1 euro (à chaque lancer) ;
   - Et il a gagné r fois λ euros aux r apparitions de Pile.

   On a donc $G_r = -T_r + r\lambda$. On en déduit par linéarité de l'espérance et avec la partie précédente :
   $$E(G_r) = r\lambda - \frac{r}{1-x} = r\left(\lambda - \frac{1}{1-x}\right)$$

8. **On suppose maintenant que $a > 1$.**

   (a) **En examinant les gains et pertes lors des T_1 premiers lancers, montrer que $G_1 = -\dfrac{1-a^{T_1}}{1-a} + \lambda a^{T_1 - 1}$.**
   Sur les T_1 premiers lancers, le candidat perd toujours sa mise :
   - au premier lancer, il perd $a^0 = 1$
   - au second, il perd $a^1 = a$
   - ...
   - au lancer T_1, il perd a^{T_1-1}

   Enfin au lancer T_1 il remporte λa^{T_1-1}.
   Le gain net est donc
   $$G_1 = -1 - a - \dots - a^{T_1-1} + \lambda a^{T_1-1} = -\sum_{k=0}^{T_1-1} a^k + \lambda a^{T_1-1} = -\frac{1-a^{T_1}}{1-a} + \lambda a^{T_1-1}$$

   (b) **Étudier l'existence des espérances des variables aléatoires a^{T_1} et G_1. Lorsque ces espérances existent, les calculer.**
   L'espérance de la variable a^{T_1} existe, par théorème du transfert, ssi la série $\sum a^k P(T_1 = k)$ est absolument convergente.

   Cette série s'écrit encore, en utilisant $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x)$:
   $$\sum_{k\geqslant 1} a^k x^{k-1}(1-x) = \frac{1-x}{x}\sum_{k\geqslant 1}(ax)^k$$
   donc converge absolument ssi $|ax| < 1$ (et diverge grossièrement sinon).
   a^{T_1} admet donc une espérance ssi $a < \dfrac{1}{x}$.

Dans ce cas on obtient :

$$\mathrm{E}\left(a^{\mathrm{T}_1}\right) = \frac{1-x}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}(ax)^k = \frac{1-x}{x}\frac{ax}{1-ax} = \frac{a(1-x)}{1-ax}$$

En remarquant que $\mathrm{G}_1 = \left(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{1-a}\right)a^{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{1-a}$, et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{G}_1) &= \mathrm{E}\left(\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{1-a}\right)a^{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{1-a}\right)\\ &= \left(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{1-a}\right)\mathrm{E}\left(a^{\mathrm{T}_1}\right) - \frac{1}{1-a}\\ \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) &= \left(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{1-a}\right)\frac{a(1-x)}{1-ax} - \frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

9. **Montrer que, sous les mêmes conditions qu'en 8b, $\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_r})$ existe pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer cette espérance.**

   On étudie donc la cv (absolue) de $\sum_{k\geqslant r} a^k \mathrm{P}(\mathrm{T}_r = k)$. Pour $k \geqslant 0$

   $$a^{k+r}\mathrm{P}(\mathrm{T}_r = k+r) = a^{k+r}\binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k = (a(1-x))^r \underbrace{\binom{k+r-1}{r-1}(ax)^k}$$

   et le terme sous l'accolade est celui d'une série convergente (formule donnée par l'énoncé pour $k = r-1$. On en déduit l'existence de $\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_r})$ dès que $|ax| < 1$, donc ssi $a < \frac{1}{x}$.
   De plus

   $$\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_r}) = (a(1-x))^r\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+r-1}{r-1}(ax)^k = (a(1-x))^r\frac{1}{(1-ax)^r} = \left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r$$

   (généralise la formule trouvée pour $\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_1})$).

10. **De manière générale, exprimer G_r en fonction de a et des variables $\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_r$; en déduire $\mathbb{E}(\mathrm{G}_r)$.**

    G_r est le gain algébrique total réalisé à l'issue du lancer ayant mené au r-ème Pile. À chaque tour i de jeu, le joueur a misé a^{i-1} : il a donc perdu

    $$\sum_{i=1}^{\mathrm{T}_r} a^{i-1} = \frac{1-a^{\mathrm{T}_r}}{1-a}$$

    Aux temps T_i il a gagné $\lambda a^{\mathrm{T}_i-1}$.

    Au total :

    $$\mathrm{G}_r = -\frac{1-a^{\mathrm{T}_r}}{1-a} + \lambda\sum_{k=1}^{r} a^{\mathrm{T}_k-1}$$

    G_r admet une espérance car tous les T_k en admettent une ; et

    $$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{G}_r) &= -\frac{1}{1-a}\left(1-\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_r})\right) + \lambda\sum_{k=1}^{r}\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_k-1})\\ &= \frac{1}{a-1}\left(1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r\right) + \frac{\lambda}{a}\sum_{k=1}^{r}\mathbb{E}(a^{\mathrm{T}_k})\\ &= \frac{1}{a-1}\left(1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r\right) + \frac{\lambda}{a}\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^k\\ &= \frac{1}{a-1}\left(1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r\right) + \frac{\lambda}{a}\frac{1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r}{1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)}\end{aligned}$$

    ce qui se factorise par $\left(1-\left(\frac{a(1-x)}{1-ax}\right)^r\right)$ et devrait un peu se simplifier...

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. **Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.**
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

   f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

   $$\forall t > 0,\ f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

   f est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ puis strictement croissante sur $[1,\infty[$.
   On a de plus clairement : $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

2. **Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.**

   Par continuité et stricte croissance de f sur $[1,+\infty[$, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[f(1),+\infty[= [2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) **Dresser le tableau de variations de g.**

   f étant strictement croissante sur $[1,+\infty[$, g l'est également.

   (b) **Soit $y \in [2,+\infty[$.**
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

   $f(t) = y$ s'écrit aussi $t + \frac{1}{t} = y$ ou $t^2 - yt + 1 = 0$. Cette équation d'inconnue t a un discriminant $\Delta = y^2 - 4 \geqslant 0$ (car $y \geqslant 2$) et on trouve $t = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$.
   $g(y)$ est donc l'une de ces deux valeurs.

   On sait que g est à valeurs dans $[1,+\infty[$; si $y \geqslant 2$, $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geqslant \frac{y}{2} \geqslant 1$ donc la solution à retenir est $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$.
   (car celle-ci est $\geqslant 1$, si l'autre l'était aussi cela nierait le caractère de bijection !).
   Donc

   $$\forall y \geqslant 2,\ g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$$

Partie B : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

4. **Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.**

   On effectue une récurrence.
   Pour $n = 1$ la propriété est vraie car $u_1 = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
   Donc $u_n \neq 0$, et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}$ existe bien ; de plus $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geqslant u_n \geqslant 1$.
   On a bien $u_{n+1} \geqslant 1$: ce qui achève l'hérédité et montre la propriété voulue.

5. **Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et renvoyant la valeur de u_n.**

   Un peu moins facile qu'à l'accoutumée car $u_{n+1} = f(n, u_n)$. On peut proposer :

```python
def terme(n):
    u = 1 # u1
    k = 1 # indices successifs
    for k in range(n-1):
        u = u+1/(k**2*u)
        k = k+1
    return u
```

6. **On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.**

   (a) **Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.**

   On a donc $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}$.
   $u_n \geqslant 1 > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$ puis $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ en multipliant par $\dfrac{1}{n^2} > 0$.

   (b) **En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.**

   $\sum 1/n^2$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

   (c) **Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.**

   Un téléscopage donne immédiatement

   $$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_1 = u_n - 1$$

   Comme $\sum v_n$ converge ses sommes partielles tendent vers une certaine limite S pour $n \to +\infty$.
   La question précédente donne

   $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{S} - 1 = \ell$.

7. (a) **Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.**

   $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1,k] \subset \mathbb{R}_+^*$: $\forall\, t \in [k-1,k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$.
   En intégrant des fonctions continues sur $[k-1,k]$ il vient :

   $$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$$

   (b) **Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :**

   $$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   Avec le même téléscopage que précédemment : $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p$.

   Par ailleurs : $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc en sommant de p à $n-1$:

   $$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

   puis avec la majoration de 7a et une relation de Chasles :

   $$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a bien $0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \displaystyle\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(c) **En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3: $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.**
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2,3]$.
Avec $p = 2$ et $n - 1 \geqslant 2 = p$:

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 1$$

Donc $u_2 \leqslant u_n \leqslant u_2 + 1$.

(d) **Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :**

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

Le même calcul d'intégrale donne, pour $n > p$:

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{p-1}$$

et pour $n \to +\infty$ on obtient bien $0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$.

(e) **En déduire un code Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.**
Une telle valeur approchée sera donnée par un terme u_p tel que $|\ell - u_p| \leqslant 10^{-4}$; d'après la question précédente il suffit pour cela que $\dfrac{1}{p-1} \leqslant 10^{-4}$, ou encore $p - 1 \geqslant 10^4$: $p = 10001$ convient.
Il suffit alors de calculer :

```
terme(10001)
```