ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2024-2025
Mathématiques

Programme de colle n°9
Semaine du 2/12

Algèbre linéaire
Réduction des matrices carrées (début)

Ce qui tient lieu d'exercice étoilé pour la colle est la diagonalisation d'une matrice (diagonalisable !) :

- **Recherche de valeurs propres par pivot ou utilisation d'un polynôme annulateur ;**
- **Détermination de bases des sous-espaces propres ;**
- **Construction de** P **et** D **telles que** $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$**, en tenant compte d'éventuelles contraintes.**

Reprise des programmes précédents

- Espaces vectoriels
- Applications linéaires.

Réduction des matrices carrées

Attention, en ECG2 Maths Appliquées on ne réduit que des matrices, et le chapitre est surtout à visée pratique. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité notamment.

Dans ce qui suit, $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
Sous-espace propre : $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}\right\}$.
(NB : la notation est acceptée pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, et on a alors la caractérisation : $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) \neq \{0\}$.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ ssi $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
Conséquence : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) \leqslant n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M, Sp (M) est contenu dans l'ensemble des racines de P.
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
  - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension $\geqslant 3$.
  - Utilisation d'un polynôme annulateur : si P est annulateur de M, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de P.

  - L'étude du rang de $M - \lambda I_n$ et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
    NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.

- Recherche des sous-espaces propres :
  - résolution de systèmes linéaires ;
  - dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à λ et on démontre que E_λ est de dimension 1).

- Si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$, construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.