TD6 : Réduction

Exercice 1.

1. Diagonaliser les matrices suivantes, en recherchant le spectre par pivot de Gauss.
   On prendra soin de suivre les contraintes suivantes : on écrira $M_i = P_i D_i P_i^{-1}$ avec :
   - Les coefficients diagonaux de D_1 rangés par ordre croissant ;
   - P_3 inversible de seconde ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, et D_3 diagonale dont les coefficients sont rangés par ordre croissant.
   - P_5 triangulaire supérieure, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Donner l'expression de $(M_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Un pivot délicat)**.** Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 7A$. Diagonaliser A.
2. Déterminer le rang de B, et celui de $B - 2I_3$. En déduire deux valeurs propres de B et les dimensions de leurs sous-espaces propres associés.
3. Calculer $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer tous les sous-espaces propres de B, et la diagonaliser.
4. Déterminer une matrice P vérifiant les conditions suivantes ;
   - $D_1 = P^{-1}AP$ est diagonale ;
   - $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
   - La première ligne de P vaut $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5. Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables ; donner à chaque fois une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

- $M = A + 2I_3$.
- $M = B^2$
- $M = 3A - 7B$.

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Sans AUCUN calcul, montrer que A est diagonalisable.
2. **Sans effectuer un pivot**, montrer que -1 est une valeur propre de A, et donner la dimension de $E_{-1}(A)$. (NB : on ne demande pas de déterminer $E_{-1}(A)$, seulement de trouver sa dimension).
3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Retrouver le fait que A est diagonalisable, et montrer qu'elle est inversible.
4. Déterminer des matrices $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et Δ diagonale telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 5 (Mises à la puissance n et application)**.**

1. On reprend les matrices de l'exercice 3. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la matrice $(A - B)^n$.
2. On considère les trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ définies par : $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n - c_n) \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n - 2b_n + 4c_n) \end{cases}$$

   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les expressions explicites de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

   (c) On considère les mêmes suites, mais vérifiant cette fois les conditions initiales $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ où a, b, c sont des réels.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ces trois suites tendent vers 0 pour $n \to +\infty$.

Exercice 6 (Mises à la puissance n et application)**.**

On considère une suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 1, u_1 = u_2 = 0$, et obéissant à la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$$

On introduit la colonne $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Donner une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = MV_n$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que si λ est racine du polynôme $X^3 - 4X^2 + X + 6$, alors λ est valeur propre de M.

3. En remarquant que -1 est racine de ce polynôme, trouver toutes les valeurs propres de M. En déduire que M est diagonalisable, et donner P et D telles que $M = PDP^{-1}$ (on prendra la première ligne de P composée uniquement de « 1 » , et les coefficients diagonaux de D classés par ordre croissant).

4. Montrer que la suite U_n définie par : $U_n = P^{-1}V_n$ vérifie $U_n = D^nU_0$.

5. On donne $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 12 & 8 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
   En déduire U_0, puis U_n pour tout entier n, puis u_n pour tout entier n.

Exercice 7 (Une matrice non diagonalisable)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Calcul de puissances de A par trigonalisation

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire le spectre de A.

2. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

3. Déterminer l'unique sous-espace propre de A.

4. Soit f canoniquement associé à A. Calculer $f((1,1,1))$. Donner la matrice de f dans la base $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\big)$. On note T cette matrice.

5. Montrer que $A = PTP^{-1}$, où P est une matrice à préciser. Calculer P^{-1}.
   (NB : on dit qu'on a trigonalisé M).

6. Soit N telle que $T = 2I_3 + N$. Calculer N^2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer T^n en fonction de n.

7. En déduire A^n en fonction de n.

Une autre méthode de calcul de A^n par un polynôme annulateur

8. En reprenant le résultat de la question 1, montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_nI + b_nA$.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

9. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur (b_n) ; en déduire l'expression de b_n pour tout entier n, puis celle de a_n.

10. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, I_3 et A.

Exercice 8 (Oral HEC E)**.**

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors A^3 l'est aussi.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9. On définit :

Définition 1. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle* hyperplan de E *tout sous-espace vectoriel de E de dimension* $\dim(E) - 1$.

On va ici démontrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles. Supposons, par l'absurde, l'existence d'un hyperplan $H \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices non inversibles.

1. Exprimer $p = \dim(H)$ en fonction de n.
2. Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de H. Montrer que $(A_1, \ldots, A_p, I_n)$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit N une matrice nilpotente (*ie* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que N^k est la matrice nulle).
   Montrer qu'il existe $A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = A + \lambda I_n$.
4. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$; en déduire que $\lambda = 0$ et que $N \in H$.

On a alors montré que toute matrice nilpotente est dans H. Nous allons maintenant construire une matrice inversible dans H, ce qui fera apparaître une contradiction.

5. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, et que leur somme est inversible. Conclure à la contradiction recherchée.
6. Essayer de généraliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour n entier quelconque.

Réduction en Python

On rappelle / introduit les outils d'algèbre linéaire de Python.
Le package pertinent est `numpy.linalg`, qui s'importe usuellement par

```
import numpy.linalg as al
```

La commande de réduction est `al.eig` (`eig` pour eigenvalues / eigenvectors : respectivement valeurs propres et vecteurs propres en anglais).
On rentre une matrice comme d'habitude : après import de `numpy`, une matrice est le `np.array` dont les composantes sont ses lignes. Par exemple, $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sera codée par :

```
M1=np.array([[2,0,0,1],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[1,0,0,2]])
```

La commande :

```
al.eig(M1)
```

renvoie alors :

```
(array([3., 1., 1., 1.]),
 array([[ 0.70710678, -0.70710678,  0.        ,  0.        ],
        [ 0.        ,  0.        ,  1.        ,  0.        ],
        [ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  1.        ],
        [ 0.70710678,  0.70710678,  0.        ,  0.        ]]))
```

Le premier `array` est la diagonale d'une matrice diagonale semblable à M_1 : ici on nous informe donc que M_1 est semblable à $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le second `array` donne la matrice de passage : ses colonnes sont donc des vecteurs propres. Si on reprend D_1 on voit que les 3 dernières colonnes de P forment une base de $E_1(M_1)$: $E_1(M_1) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -0.707... \\ 0 \\ 0 \\ 0.707... \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
On voit que le premier vecteur peut avec profit être normalisé en divisant par 0.707... ; on a en fait

$$E_1(M_1) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad et \quad E_3(M_1) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

`al.eig` fournit donc ici la matrice de passage suivante :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.707... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.707... & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou, de manière équivalente :} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$.
Vous pouvez maintenant vérifier tous vos résultats de ce TD avec Python !!

Remarques :

- `al.solve` ne nous aidera pas à rechercher des sous-espaces propres : il ne fonctionne que sur des systèmes de Cramer, ce que ne sont pas, par définition, les systèmes menant à la détermination de sep.
- Le rang d'une matrice sert assez régulièrement à la détermination de sous-espaces propres. Ici on peut retrouver[1] que $\dim(E_3(M_1)) = 1$ avec la commande suivante :

  ```
  al.matrix_rank(M1-3*np.eye(4))
  ```

  qui renvoie le résultat : `3`.
  On rappelle que la commande `np.eye(n)` *code la matrice* I_n.

[1] avec un peu de raisonnement !